

Simulação Numérica do Problema de N-Corpos Gravitacional

Octavio Augusto Potalej

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Dezembro, 2024

Motivação

- Começamos estudando um artigo sobre setas do tempo gravitacionais;
- Precisamos nos aprofundar no Problema de N-Corpos;
- Decidimos simular o PNCG numericamente para visualizar a teoria;
- Com simulações, podemos visualizar resultados teóricos e até obter ideias novas sobre o problema!

Identification of a gravitational arrow of time

Julian Barbour,¹ Tim Koslowski,² and Flavio Mercati³

¹College Farm, South Newington, Banbury, Oxon, OX15 1JG UK,
Visiting Professor in Physics at the University of Oxford, UK.

²University of New Brunswick, Fredericton, NB, E5B 5A3 Canada.
³Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North,
Waterloo, ON, N2L 2Y5 Canada.

It is widely believed that special initial conditions must be imposed on any time-symmetric law if its solutions are to exhibit behavior of any kind that defines an 'arrow of time'. We show that this is not so. The simplest non-trivial time-symmetric law that can be used to model a dynamically closed universe is the Newtonian N -body problem with vanishing total energy and angular momentum. Because of special properties of this system (likely to be shared by any law of the Universe), its typical solutions all divide at a uniquely defined point into two halves. In each a well-defined measure of shape complexity fluctuates but grows irreversibly between rising bounds from that point. Structures that store dynamical information are created as the complexity grows and act as 'records'. Each solution can be viewed as having a single past and two distinct futures emerging from it. Any internal observer must be in one half of the solution and will only be aware of the records of one branch and deduce a unique past and future direction from inspection of the available records.

Figura: Capa do artigo

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições \mathbf{q}_a , regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições \mathbf{q}_a , regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Forma Hamiltoniana

Tomando o momento generalizado $\mathbf{p}_a = m_a \dot{\mathbf{q}}_a$, podemos reescrever o problema via equações de Hamilton:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{p}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Omega \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad H = \sum_{a=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_a\|^2}{2m_a} + V(\mathbf{q}).$$

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- 1 Energia total H ;
- 2 Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$;
- 3 Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- 4 Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$.

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- 1 Energia total H ;
- 2 Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$;
- 3 Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- 4 Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$.

Valores padrão

- O PNCG é invariante por translações, então tomamos sempre $\mathbf{q}_{cm}(t_0) = \mathbf{0}$;
- Por outros motivos, sempre tomamos também que $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{q}_{cm}(t) = \mathbf{0}, \forall t$, e que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Escala do sistema

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Escala do sistema

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Momento de inércia

Podemos medir um tamanho global de um PNCG através do *momento de inércia*:

$$I := R^2 := \sum_{a=1}^N m_a \|\mathbf{q}_a\|^2.$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle .$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle.$$

Identidade de Lagrange-Jacobi

Para um sistema com potencial V_k homogêneo de grau k e energia total E , vale:

$$\ddot{I} = 4E - 2(2 + k)V_k.$$

No PNCG, $k = -1$, então

$$\ddot{I} = 4E - 2V.$$

Dinâmica de Formas: Eliminando a escala

Dinâmica de Formas

Buscamos uma representação "objetiva" do PNCG. Eliminamos translações, rotações e a escala. Ficamos com o *espaço de formas* S .

Dinâmica de Formas: Eliminando a escala

Dinâmica de Formas

Buscamos uma representação "objetiva" do PNCG. Eliminamos translações, rotações e a escala. Ficamos com o *espaço de formas* S .

Princípio de Mach-Poincaré

Um ponto e uma direção em S determinam a evolução em S de forma única.

Dinâmica de Formas: Eliminando a escala

Dinâmica de Formas

Buscamos uma representação "objetiva" do PNCG. Eliminamos translações, rotações e a escala. Ficamos com o *espaço de formas* S .

Princípio de Mach-Poincaré

Um ponto e uma direção em S determinam a evolução em S de forma única.

Eliminação da escala

As coordenadas (σ, π) são invariantes por translação e por escala:

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{m_a}}{R} \mathbf{q}_a, \quad \pi_a = \frac{R}{\sqrt{m_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Não são por rotação, mas isso não afeta os resultados.

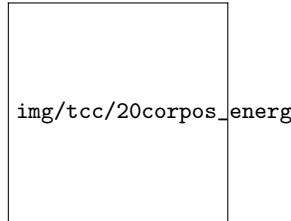


Figura: Problema de 20 corpos.

Dinâmica de Formas: Complexidade

Complexidade

Para determinar a evolução do sistema em função somente dos pontos em S , tomamos a *complexidade*:

$$C_S := M^{-3/2} R |V|.$$

Pela Identidade de Lagrange-Jacobi, $E \geq 0$ implica que I tem formato côncavo para cima, então C_S tem ponto de mínimo global.

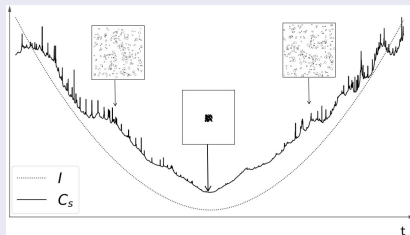


Figura: C_S e I em um problema de 100 corpos com $E = 0$.

Integração numérica

Voltando para o PNCG, não é fácil estudá-lo qualitativamente. Simulá-lo numericamente pode dar sugestões de quais caminhos seguir e visualizações de resultados teóricos.

Como temos um conjunto de EDOs, podemos utilizar integradores numéricos de passo único:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + h\Phi_h(\mathbf{z}_k), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

A qualidade do resultado aproximado depende do tamanho de passo h e do método Φ_h .

Integração numérica: Métodos tradicionais

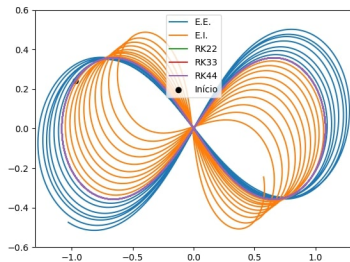


Figura: Lemniscata com $h = 10^{-3}$

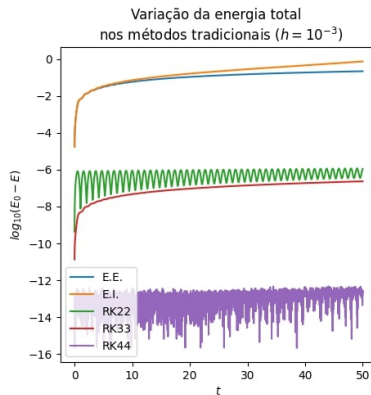


Figura: Variação da energia total na lemniscata com $h = 10^{-3}$.

Integração numérica: Métodos simpléticos

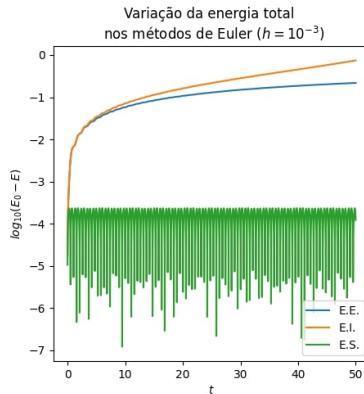
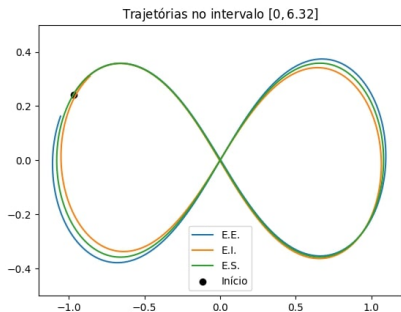
Integradores simpléticos

- Para problemas hamiltonianos autônomos existem métodos mais recomendados: os simpléticos;
- Um método simplético é aquele cuja aplicação $\Psi_k : \mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{z}_{k+1}$ é simplética, i.e.,

$$(D\Psi_h)\Omega(D\Psi_h)^T = \Omega.$$

- Um método assim preserva a estrutura simplética do sistema, conservando a função hamiltoniana e conseqüentemente as outras integrais primeiras.

Integração numérica: Métodos simpléticos



Integração numérica: Métodos simpléticos

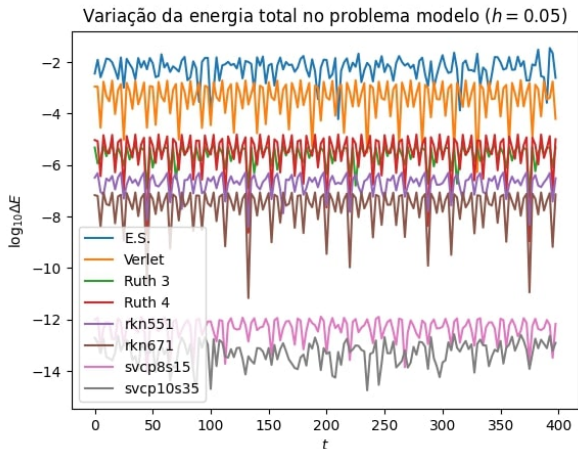


Figura: Variação da energia total para os métodos simpléticos apresentados. A lemniscata foi integrada no intervalo $[0, 400]$ com tamanho de passo $h = 0.05$.

Corretor numérico

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar uma correção sobre as aproximações.

Corretor numérico

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar uma correção sobre as aproximações.

Considerando um PVI conservativo e $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ suas k integrais primeiras, se z^* é uma aproximação de $z = z(t^*)$, temos por linearização

$$z = z^* + D\Psi(z^*)^T \alpha,$$

onde α resolve

$$D\Psi(z^*)D\Psi(z^*)^T \alpha = \Psi(z_0) - \Psi(z^*).$$

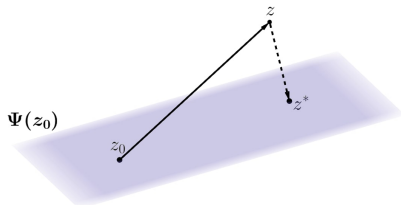


Figura: Visualização do corretor

Corretor numérico

Vamos testar com o método de Euler explícito:

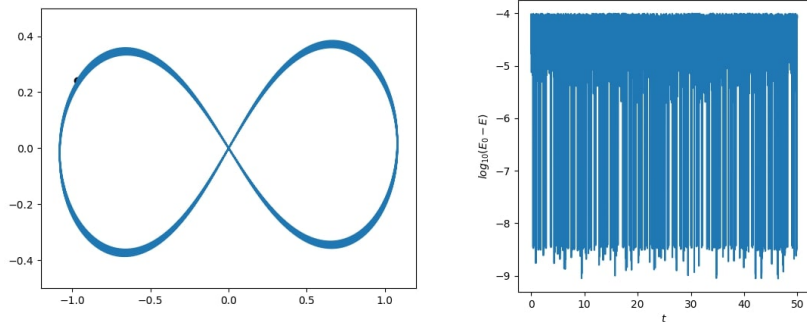


Figura: Euler explícito com correção ($h = 10^{-3}$, $\epsilon_c = 10^{-4}$)

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

- 1 **Centro de massas na origem:** $\mathbf{q}_a \mapsto \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{cm}(0)$.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

1 **Centro de massas na origem:** $\mathbf{q}_a \mapsto \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{cm}(0)$.

2 **Momento linear total:**

$$\mathbf{p}_a \mapsto \mathbf{p}_a - \frac{c_a}{C}(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}) \implies \mathbf{P} \mapsto \tilde{\mathbf{P}}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos $c_a = m_a$.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

- 1 Centro de massas na origem: $q_a \mapsto q_a - q_{cm}(0)$.
- 2 Momento linear total:

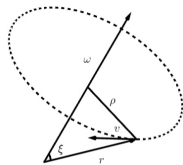
$$p_a \mapsto p_a - \frac{c_a}{C}(P - \tilde{P}) \implies P \mapsto \tilde{P}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos $c_a = m_a$.

- 3 Momento angular total:

$$p_a \mapsto p_a - m_a q_a \times \omega, \quad \implies J \mapsto \tilde{J}.$$

$$l_{total} \omega = J - \tilde{J}$$



Valores iniciais

⊕ **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

Valores iniciais

• **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

Valores iniciais

• **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

Método direto

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = \frac{1}{\alpha} \left(\mathbf{q}_a - \frac{1}{M} \mathbf{q}_{cm}(0) \right),$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_a = \beta \left(\mathbf{p}_a - \frac{m_a}{M} \left(\mathbf{P} - \beta^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \right) - m_a \mathbf{q}_a \times \boldsymbol{\omega} \right),$$

$$I_{total} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} - \alpha \beta^{-1} \tilde{\mathbf{J}}$$

$$\alpha = 1 + \tilde{E}/V_0$$

$$\beta = \pm \sqrt{-\frac{V_0 + S_2}{S_1}}$$

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

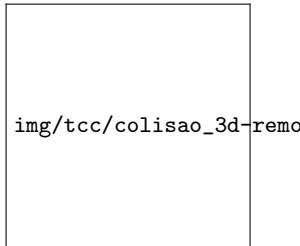
- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);



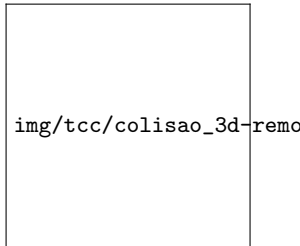
Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);
- Amortecer o potencial: para $\epsilon > 0$,

$$V = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\| \mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a \|^2 + \epsilon^2}}.$$



Exemplos

Problema IAU-25 via RKN671 com $h = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-1}$ e $\epsilon_E = 10^{-5}$.

- Sem colisões;
- Colisões e $r = 0.05$;
- Colisões e $r = 0.1$.

[Vídeos dos exemplos.](#)

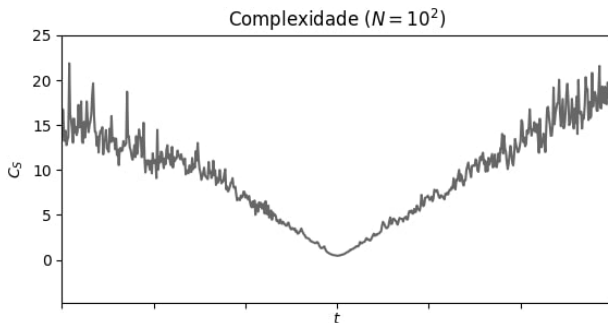
Dinâmica de Formas

Voltando à Dinâmica de Formas, podemos observar o comportamento da complexidade para diferentes valores de E .

- $N = 100$ e $E = 0$ (p.b. A.6);
- $N = 10^3$ e $E = -0.25$ (p.b. A.7);
- $N = 10^3$ e $E = 0$ (p.b. A.8);
- $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a = 10^{-3}$ (p.b. A.9);
- $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a > 1$ (p.b. A.10);

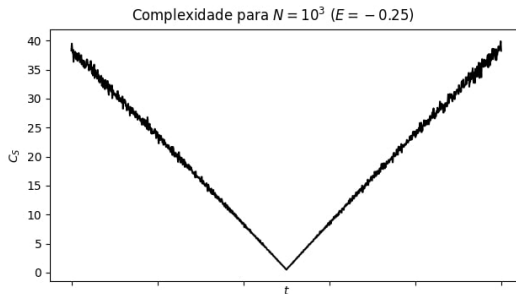
Dinâmica de Formas: $N = 100$ e $E = 0$ (p.b. A.6)

- Vídeos
- Complexidade:

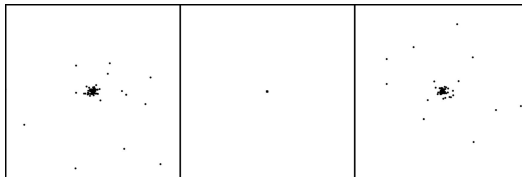


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = -0.25$ (p.b. A.7)

- Vídeos
- Complexidade:

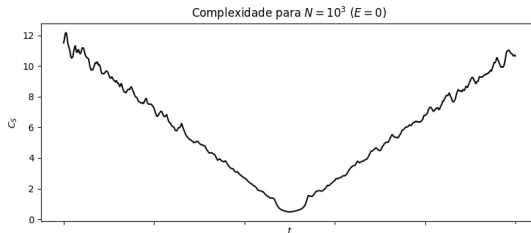


- Espalhamento:

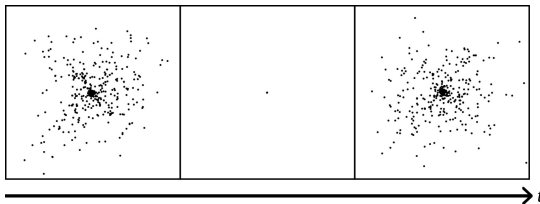


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = 0$ (p.b. A.8)

- Vídeos
- Complexidade:

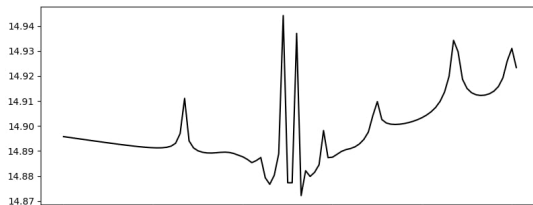


- Espalhamento:

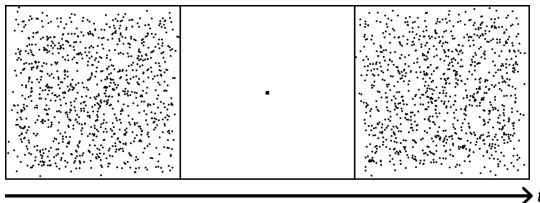


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a = 10^{-3}$ (p.b. A.9)

- Vídeos
- Complexidade:

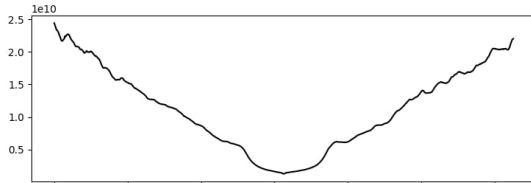


- Espalhamento:

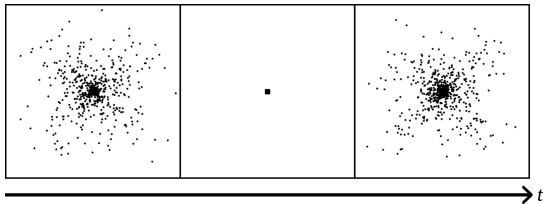


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a > 1$ (p.b. A.10)






- Vídeos
- Complexidade:



- Espalhamento:



Referências

-  AARSETH, Sverre J. *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-43272-6. DOI: 10.1017/CB09780511535246.
-  BARBOUR, Julian; KOSLOWSKI, Tim; MERCATI, Flavio. Identification of a Gravitational Arrow of Time. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 113, n. 18, out. 2014. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.113.181101.
-  HAIRER, Ernst; LUBICH, Christian; WANNER, Gerhard. *Geometric numerical integration*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, fev. 2006. (Springer Series in Computational Mathematics).
-  POTALEJ, Octavio Augusto. *gravidade-fortran*. São Paulo: GitHub. Disponível em: <https://github.com/Potalej/gravidade-fortran>.
-  VOLCHAN, Sérgio. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Estatística - IMPA, 2007.