

Simulação Numérica do Problema de N-Corpos Gravitacional (e um pouco mais)

Octavio Augusto Potalej

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Setembro, 2025

Motivação

- Começamos estudando um artigo sobre setas do tempo gravitacionais;
- Precisamos nos aprofundar no Problema de N-Corpos;
- Decidimos simular o PNCG numericamente para visualizar a teoria;
- Com simulações, podemos visualizar resultados teóricos e até obter ideias novas sobre o problema!

Identification of a gravitational arrow of time

Julian Barbour,¹ Tim Koslowski,² and Flavio Mercati³

¹College Farm, South Newington, Banbury, Oxon, OX15 4JG UK,
Visiting Professor in Physics at the University of Oxford, UK.

²University of New Brunswick, Fredericton, NB, E5B 5A3 Canada.

³Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North,
Waterloo, ON, N2L 2Y5 Canada.

It is widely believed that special initial conditions must be imposed on any time-symmetric law if its solutions are to exhibit behavior of any kind that defines an 'arrow of time'. We show that this is not so. The simplest non-trivial time-symmetric law that can be used to model a dynamically closed universe is the Newtonian N -body problem with vanishing total energy and angular momentum. Because of special properties of this system (likely to be shared by any law of the Universe), its typical solutions all divide at a uniquely defined point into two halves. In each a well-defined measure of shape complexity fluctuates but grows irreversibly between rising bounds from that point. Structures that store dynamical information are created as the complexity grows and act as 'records'. Each solution can be viewed as having a single past and two distinct futures emerging from it. Any internal observer must be in one half of the solution and will only be aware of the records of one branch and deduce a unique past and future direction from inspection of the available records.

Figura: Capa do artigo

Parte I

O Problema e a simulação numérica

PNCG

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições $\mathbf{q}_a$, regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Forma Hamiltoniana

Tomando o momento generalizado $\mathbf{p}_a = m_a \dot{\mathbf{q}}_a$, podemos reescrever o problema via equações de Hamilton:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{p}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Omega \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad H = \sum_{a=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_a\|^2}{2m_a} + V(\mathbf{q}).$$

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- ① Energia total H ;
- ② Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$;
- ③ Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- ④ Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$.

Centro de massas

O PNCG é invariante por translações, então tomamos sempre $\mathbf{q}_{cm}(t_0) = \mathbf{0}$.

Simulação numérica: integradores

Simular numericamente o problema de N-corpos pode ajudar a ter *insights*.

Formas de simular:

- Integração numérica tradicional/geral;
- Integração numérica simplética;
- Aproximações e métodos específicos.

Simulação numérica: Métodos tradicionais/gerais

- Os métodos tradicionais/gerais servem para quaisquer PVI de EDO;
- Foquei nos métodos de passo único: $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + h\Phi_h(\mathbf{z}_k)$, $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

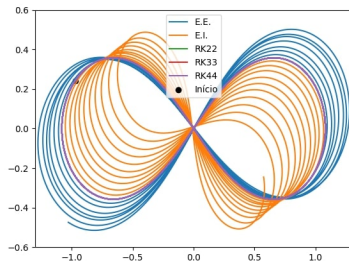


Figura: Lemniscata com $h = 10^{-3}$

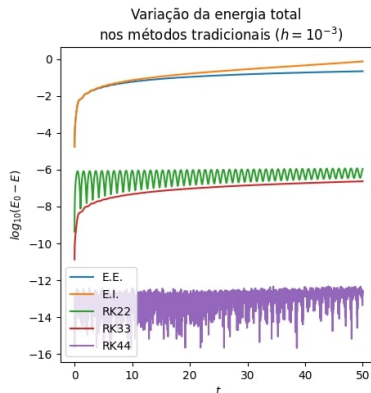


Figura: Variação da energia total na lemniscata com $h = 10^{-3}$.

Integração numérica: Métodos simpléticos

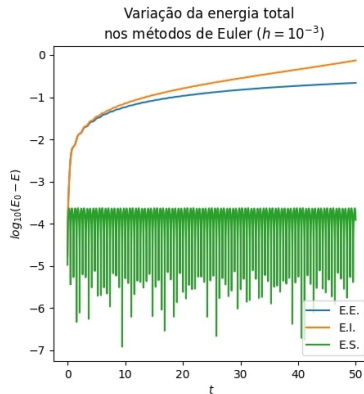
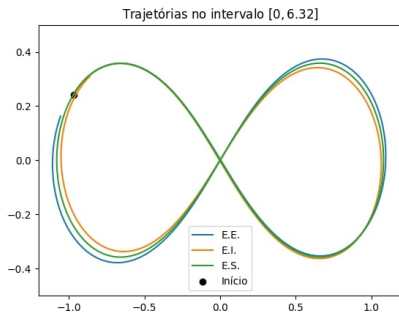
Integradores simpléticos

- Para problemas hamiltonianos autônomos existem métodos mais interessantes: os simpléticos;
- Um método simplético é aquele cuja aplicação $\Psi_k : \mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{z}_{k+1}$ é simplética, i.e.,

$$(D\Psi_h)\Omega(D\Psi_h)^T = \Omega.$$

- Um método assim preserva a estrutura simplética do sistema, conservando a função hamiltoniana e consequentemente as outras integrais primeiras.

Integração numérica: Métodos simpléticos



Integração numérica: Métodos simpléticos

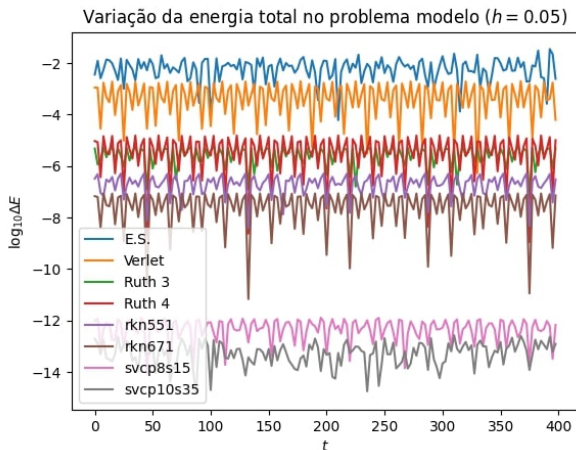
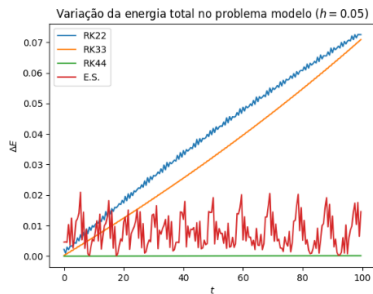
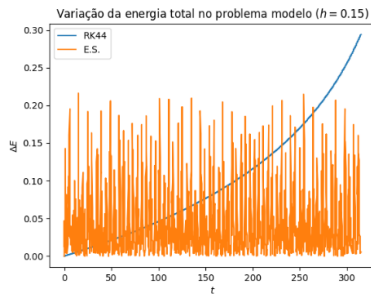


Figura: Variação da energia total para os métodos simpléticos apresentados. A lemniscata foi integrada no intervalo $[0, 400]$ com tamanho de passo $h = 0.05$.

Integração numérica: Métodos simpléticos - Vantagem



(a) Intervalo $[0, 100]$ e $h = 0.05$.



(b) Intervalo $[0, 300]$ e $h = 0.15$.

Figura: Variação da energia total na simulação da lemniscata com RK22, RK33, RK44 e Euler Simplético.

Simulação numérica: Métodos específicos

NBODY Codes (AARSETH, 2003)

- Propósitos variados, mas no geral utilizados para problemas reais;
- Modelo hierárquico: cada partícula tem seu próprio timestep;
- *Block-timestep*: partículas com timestep iguais são integradas ao mesmo tempo.
- Esquema Hermite de 4^a Ordem, adaptado para regularizações múltiplas e para máquinas especializadas (ex.: GRAPE).
- **OBS:** Não é simplético...

Corretor numérico

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

Corretor numérico

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

Considerando um PVI conservativo e $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ suas k integrais primeiras, se z^* é uma aproximação de $z = z(t^*)$, temos por linearização

$$z = z^* + D\Psi(z^*)^T \alpha,$$

onde α resolve

$$D\Psi(z^*)D\Psi(z^*)^T \alpha = \Psi(z_0) - \Psi(z^*).$$

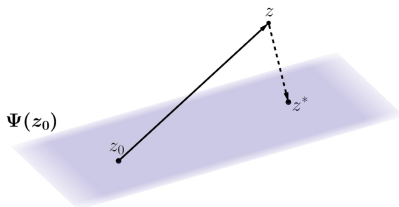


Figura: Visualização do corretor

Corretor numérico

Vamos testar com o método de Euler explícito:

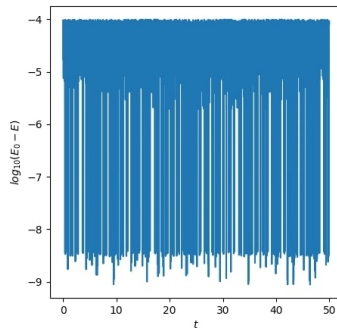
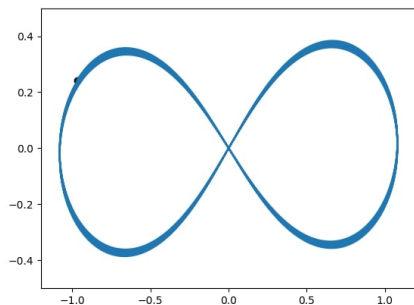


Figura: Euler explícito com correção ($h = 10^{-3}$, $\epsilon_c = 10^{-4}$)

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

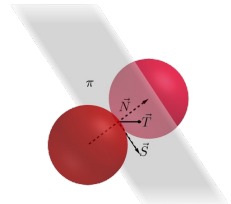
- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.

Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);



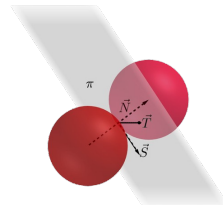
Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);
- Amortecer o potencial: para $\epsilon > 0$,

$$V = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\| + \epsilon^2}}.$$



Colisões

Exemplos

Problema IAU-25 via RKN671 com $h = 10^{-3}$.

- Potencial amortecido com $\varepsilon = 0.1$;
- Choques com raio $r = 0.05$;
- Choques com raio $r = 0.1$.

[Vídeos dos exemplos.](#)

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

- 1 **Centro de massas na origem:** $q_a \mapsto q_a - q_{cm}(0)$.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- ① Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- ② Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

① **Centro de massas na origem:** $q_a \mapsto q_a - q_{cm}(0)$.

② **Momento linear total:**

$$p_a \mapsto p_a - \frac{c_a}{C}(P - \tilde{P}) \implies P \mapsto \tilde{P}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos $c_a = m_a$.

Valores iniciais

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- ④ Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- ② Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

Método:

- ④ Centro de massas na origem: $q_a \mapsto q_a - q_{cm}(0)$.
- ② Momento linear total:

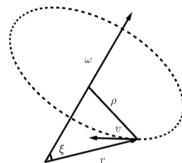
$$p_a \mapsto p_a - \frac{c_a}{C}(P - \tilde{P}) \implies P \mapsto \tilde{P}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos $c_a = m_a$.

- ③ Momento angular total:

$$p_a \mapsto p_a - m_a q_a \times \omega, \quad \implies \quad J \mapsto \tilde{J}.$$

$$I_{total}\omega = J - \tilde{J}$$



Valores iniciais

❷ **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

Valores iniciais

❶ **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

Valores iniciais

❶ **Energia total:** $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

Método direto

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = \frac{1}{\alpha} \left(\mathbf{q}_a - \frac{1}{M} \mathbf{q}_{cm}(0) \right),$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_a = \beta \left(\mathbf{p}_a - \frac{m_a}{M} \left(\mathbf{P} - \beta^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \right) - m_a \mathbf{q}_a \times \boldsymbol{\omega} \right), \quad \beta = \pm \sqrt{-\frac{V_0 + S_2}{S_1}}$$

$$I_{total} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} - \alpha \beta^{-1} \tilde{\mathbf{J}}$$

$$\alpha = 1 + \tilde{E}/V_0$$

Não funciona para potencial amortecido!

Parte II

Questões de escala

Medidas de escala

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Medidas de escala

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Momento de inércia

Podemos medir um tamanho global de um PNCG através do *momento de inércia*:

$$I := R^2 := \sum_{a=1}^N m_a \|\mathbf{q}_a\|^2.$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle .$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle .$$

Identidade de Lagrange-Jacobi

Para um sistema com potencial V_k homogêneo de grau k e energia total E , vale:

$$\ddot{I} = 4E - 2(2 + k)V_k.$$

No PNCG, $k = -1$, então

$$\ddot{I} = 4E - 2V.$$

O que esperar para o sistema?

Conforme (MARCHAL; SAARI, 1976), podemos esperar algumas coisas para um problema com $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

- Se $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, o sistema evapora em subsistemas (conjuntos de partículas com separação limitada por $O(t^{2/3})$ cujos centros de massa se separam linearmente em t ;

O que esperar para o sistema?

Conforme (MARCHAL; SAARI, 1976), podemos esperar algumas coisas para um problema com $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

- Se $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, o sistema evapora em subsistemas (conjuntos de partículas com separação limitada por $O(t^{2/3})$ cujos centros de massa se separam linearmente em t ;
- Cada subsistema tem partículas individuais ou clusters (no geral, pares keplerianos) que permanecem juntos.

O que esperar para o sistema?

Conforme (MARCHAL; SAARI, 1976), podemos esperar algumas coisas para um problema com $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

- Se $E = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, o sistema evapora em subsistemas (conjuntos de partículas com separação limitada por $O(t^{2/3})$ cujos centros de massa se separam linearmente em t ;
- Cada subsistema tem partículas individuais ou clusters (no geral, pares keplerianos) que permanecem juntos.
- Cada subsistema também tem quantidades conservadas assintoticamente.

$$E_{\mathcal{J}}(t) = E_{\mathcal{J}}(\infty) + O(t^{-5/3}),$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{J}_{\mathcal{J}}(\infty) + O(t^{-2/3}),$$

$$\mathbf{X}_{\mathcal{J}}(t)/t = \mathbf{V}_{\mathcal{J}}(\infty) + O(t^{-1/3}),$$

onde $E_{\mathcal{J}}$, $\mathbf{J}_{\mathcal{J}}$ e $\mathbf{X}_{\mathcal{J}}$ são a energia, o momento angular e a distância do subsistema ao centro de massas (origem).

Como caracterizar essa evolução?

- Enquanto V contém informações sobre as menores distâncias, I contém sobre as maiores.
 - Comprimento da raiz quadrada média: $\ell_{rms} = \sqrt{I} = R$;
 - Comprimento harmônico médio: $\ell_{mhl} = 1/|V|$.

Como caracterizar essa evolução?

- Enquanto V contém informações sobre as menores distâncias, I contém sobre as maiores.
 - Comprimento da raiz quadrada média: $\ell_{rms} = \sqrt{I} = R$;
 - Comprimento harmônico médio: $\ell_{mhl} = 1/|V|$.
- Complexidade: $C_S := M^{-5/2} \cdot I_{rms}/\ell_{mhl} = R|V|/M^{5/2}$.

Como caracterizar essa evolução?

- Enquanto V contém informações sobre as menores distâncias, I contém sobre as maiores.
 - Comprimento da raiz quadrada média: $\ell_{rms} = \sqrt{I} = R$;
 - Comprimento harmônico médio: $\ell_{mhl} = 1/|V|$.
- Complexidade: $C_S := M^{-5/2} \cdot I_{rms}/\ell_{mhl} = R|V|/M^{5/2}$.
- Para regimes com $E \geq 0$, I é côncavo para cima e C_S tem mínimo global - o *ponto de Janus*:

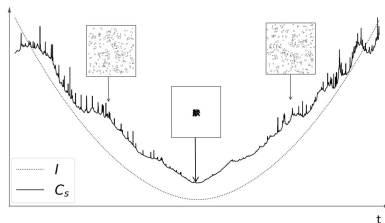


Figura: C_S e I em um problema de 100 corpos com $E = 0$.

Parte III

Redução do problema e as setas do tempo

Princípio de Mach

É possível eliminar completamente as noções de espaço e tempo absolutos da mecânica newtoniana?

Princípio de Mach

É possível eliminar completamente as noções de espaço e tempo absolutos da mecânica newtoniana?

Mach fez essa pergunta, e deixou ideias de o que uma mecânica desse tipo precisaria cumprir.

Princípio de Mach (BARBOUR, 2014)

A especificação de um ponto e uma direção (**forma forte**) ou de um ponto e um vetor tangente (**forma fraca**) em um espaço de configurações reduzido determinam a evolução de forma única.

(BARBOUR; BERTOTTI, 1982) propuseram um método universal (*Best Matching*) para criar teorias que implementam o Princípio de Mach.



Figura: Ernst Mach
(1838-1916)

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos

Objetivo

Queremos descrever a dinâmica do problema de 3 corpos em termos da dinâmica dos ângulos internos do triângulo formado por $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$.

Shape Space

Sejam $Q = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in Q$ e $SE(2)$ o grupo de movimentos rígidos no plano (não inclui reflexões). O **Shape Space** é o espaço $Q/SE(2)$.

Antes...

Sem perda de generalidade, vamos considerar que $\mathbf{q}_{cm} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.
Para mais detalhes, (MONTGOMERY, 2002).

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos

Eliminando translações

Vetores de Jacobi:

$$\xi_1 = x_2 - x_1, \quad \xi_2 = x_3 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Coordenadas de Jacobi:

$$z_1 = \sqrt{\mu_1} \xi_1, \quad z_2 = \sqrt{\mu_2} \xi_2,$$

onde

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2}.$$

Vantagens: $I = |z_1|^2 + |z_2|^2$, $T = |\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2$

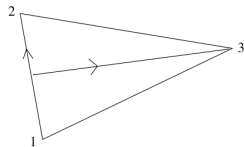


Figura: Vetores de Jacobi.

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos

Eliminando rotações

- Rotação: $\mathbf{z} = e^{i\theta} \mathbf{z}$;
- Então o shape space é isométrico ao quociente $\mathbb{C}^2/S^1$;
- Temos então $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$w_1 = \frac{1}{2}(|\mathbf{z}_1|^2 - |\mathbf{z}_2|^2), \quad w_2 = \mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}}_2, \quad w_3 = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2.$$

- Vantagens:
 - Invariante por ações de $SE(2)$;
 - $\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{4}I^2$.
 - O espaço restante (Shape Space) tem a topologia da esfera).

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos

Coordenadas esféricas

Podemos tomar coordenadas nessa esfera:

$$\frac{(w_1, w_2, w_3)}{\|w\|} := (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta).$$

Com isso, podemos identificar pontos interessantes nessa esfera:

- Colisão 1-2: $\phi = \pi/2, \theta = \pi$;
- Colisão 1-3: $\phi = \pi/2, \theta = -\arctan C_m$;
- Colisão 2-3: $\phi = \pi/2, \theta = \arctan C_m$;

Com massas iguais, $\theta = \pm\pi/3$, respectivamente.

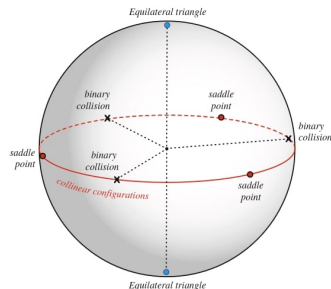


Figura: (BARBOUR; LOSTAGLIO et al., 2013)

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos

Como eliminar o tempo?

Sendo $\zeta = D/D_0$ e $\pi_a = \mathbf{p}_a/D_0$, temos:

$$\mathcal{H} = \log \left(\pi_\theta^2 + \sin^{-2} \theta \pi_\phi^2 + \frac{1}{4} \zeta^2 \right) - \log C_S.$$

Podemos fazer uma transf. não-canônica:

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_\theta = \pi_\theta / \zeta, \quad \omega_\phi = \pi_\phi / \zeta$$

o que leva a um sistema dissipativo:

$$H_0 = \log(\omega_\theta^2 + \sin^{-2} \theta \omega_\phi^2 + 1/4) - \log C_S.$$

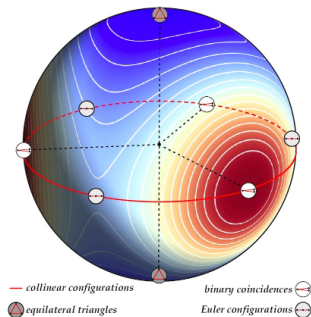


Figura: Shape sphere do problema de 3 corpos com mapa de calor de C_S .

Redução do problema de N-corpos: Coordenadas objetivas

Eliminação da escala em N-corpos

As coordenadas (σ, π) são invariantes por translação e por escala:

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{\mu_a}}{R} \mathbf{q}_a, \quad \pi_a = \frac{R}{\sqrt{\mu_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Não são por rotação, mas tudo bem...

Redução do problema de N-corpos: Coordenadas objetivas

Eliminação da escala em N-corpos

As coordenadas (σ, π) são invariantes por translação e por escala:

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{\mu_a}}{R} \mathbf{q}_a, \quad \pi_a = \frac{R}{\sqrt{\mu_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Não são por rotação, mas tudo bem...

Propriedades

$$R_\sigma = \sum_{a=1}^N \|\sigma_a\|^2 = 1,$$

$$\sigma_{cm} = \sum_{a=1}^N \sqrt{\mu_a} \sigma_a = \mathbf{0},$$

$$\{f(D, R), \pi_a\} = 0,$$

$$D_{\sigma, \pi} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}i_a \cdot \sigma_a = 0,$$

$$\pi_\sigma = \sum_{a=1}^N \sqrt{\mu_a} \pi_a = \mathbf{0},$$

$$\{f(D, R), \sigma_a\} = 0.$$

Redução do problema de N-corpos: Evolução

Eliminando o tempo

O momento de dilatação D comuta com $\log R$. Se $E = 0$ e sendo $K_S = \|\pi\|^2$:

$$\mathcal{H} = \log(K_S + \zeta^2) - \log C_S,$$

e temos:

$$\frac{d\sigma_a}{d\zeta} = \frac{2\pi_a}{K_S + \zeta^2}, \quad \frac{d\pi_a}{d\zeta} = \frac{\partial \log C_S}{\partial \sigma_a} - \frac{K_S}{K_S + \zeta^2} \sigma_a.$$

Novamente, um sistema não autônomo.

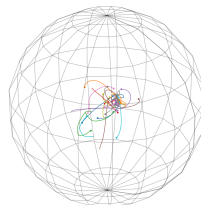


Figura: Problema de 20 corpos.

Redução do problema de N-corpos: A escala como fricção

Através de uma transformação não-canônica

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_a = \pi_a / \zeta,$$

obtemos uma hamiltoniana autônoma, mas *dissipativa*:

$$H_0 = \log \left(\|\omega\|^2 + 1 \right) - \log C_S.$$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

- A escala atua como uma fricção no espaço de pré-formas.
- A complexidade C_S deve crescer indefinidamente.
- A dinâmica para H_0 tem início, então C_S tem um mínimo.
- Então, C_S caracteriza uma seta do tempo para o problema!

Energia positiva?

Se $E > 0$, temos outra hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \log \left(C_S + \sqrt{C_S^2 + \frac{1}{2}ED_0^2(K_S + \zeta^2)} \right).$$

- O princípio de Mach-Poincaré já não vale aqui, mas ainda temos uma teoria invariante por escala e adimensional.
- Quando $\zeta \rightarrow \infty$, C_S se enfraquece e o sistema assintoticamente congela no espaço de formas.

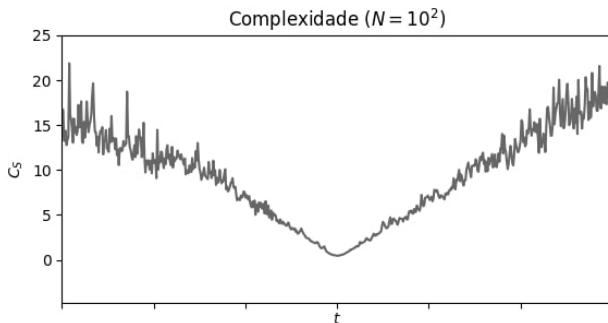
Dinâmica de Formas

Voltando à Dinâmica de Formas, podemos observar o comportamento da complexidade para diferentes valores de E .

- $N = 100$ e $E = 0$ (p.b. A.6);
- $N = 10^3$ e $E = -0.25$ (p.b. A.7);
- $N = 10^3$ e $E = 0$ (p.b. A.8);
- $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a = 10^{-3}$ (p.b. A.9);
- $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a > 1$ (p.b. A.10);

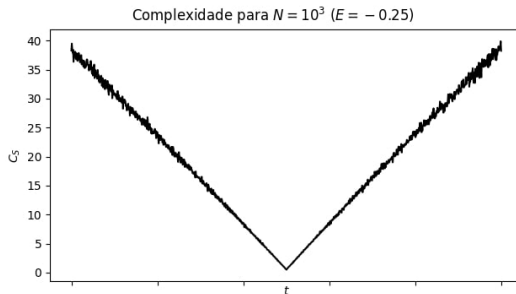
Dinâmica de Formas: $N = 100$ e $E = 0$ (p.b. A.6)

- Vídeos
- Complexidade:

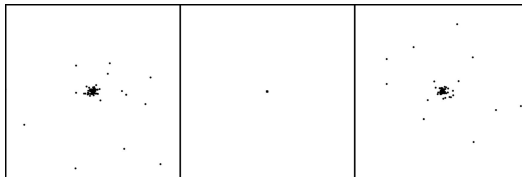


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = -0.25$ (p.b. A.7)

- Vídeos
- Complexidade:

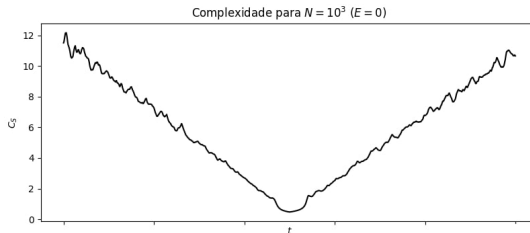


- Espalhamento:

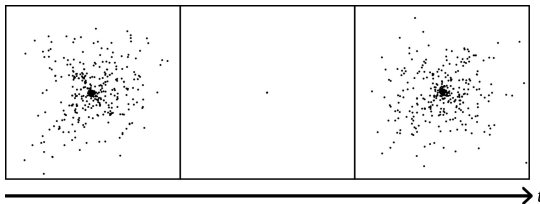


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = 0$ (p.b. A.8)

- Vídeos
- Complexidade:

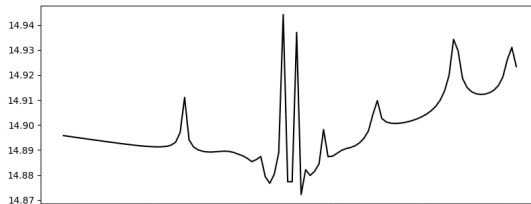


- Espalhamento:

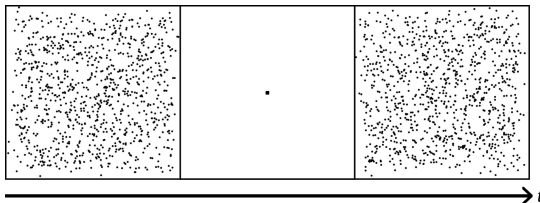


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a = 10^{-3}$ (p.b. A.9)

- Vídeos
- Complexidade:

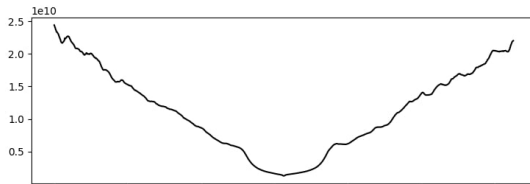


- Espalhamento:

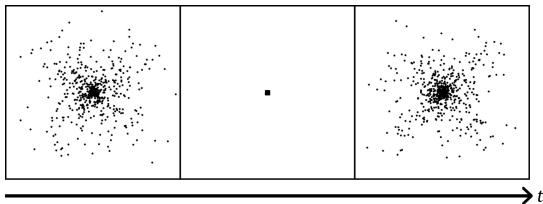


Dinâmica de Formas: $N = 10^3$, $E = 0.25$ e $m_a > 1$ (p.b. A.10)

- Vídeos
- Complexidade:



- Espalhamento:



Referências I



AARSETH, Sverre J. *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-43272-6. DOI: 10.1017/CB09780511535246.



ALBOUY, Alain; CHENCINER, Alain. Le problème des n corps et les distances mutuelles. *Inventiones Mathematicae*, Springer Science e Business Media LLC, v. 131, n. 1, p. 151–184, dez. 1997. ISSN 1432-1297. DOI: 10.1007/s002220050200. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s002220050200>.



BARBOUR, Julian. Kepler and Mach's Principle. In: GENERAL Relativity, Cosmology and Astrophysics. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. P. 3–32. ISBN 9783319063492. DOI: 10.1007/978-3-319-06349-2_1. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06349-2_1.



BARBOUR, Julian; BERTOTTI, Bruno. Mach's Principle and the Structure of Dynamical Theories. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 382, n. 1783, p. 295–306, ago. 1982. ISSN 0080-4630. DOI: 10.1098/rspa.1982.0102. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1982.0102>.

Referências II



BARBOUR, Julian; LOSTAGLIO, Matteo; MERCATI, Flavio. Scale anomaly as the origin of time. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science e Business Media LLC, v. 45, n. 5, p. 911–938, abr. 2013. ISSN 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-013-1516-y. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-013-1516-y>.



MARCHAL, Christian; SAARI, Donald G. On the final evolution of the n-body problem. *Journal of Differential Equations*, Elsevier BV, v. 20, n. 1, p. 150–186, jan. 1976. ISSN 0022-0396. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90101-7. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396\(76\)90101-7](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(76)90101-7).



MONTGOMERY, Richard. Infinitely Many Syzygies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer Science e Business Media LLC, v. 164, n. 4, p. 311–340, out. 2002. ISSN 1432-0673. DOI: 10.1007/s00205-002-0211-z. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00205-002-0211-z>.