# MAT2219 — Lista 5

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área:

(a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$;

(b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$;

(c) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$;

(d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;

(e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$;

(f) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $a > 0$;

(g) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.

(h) S é a parte do parabolóide $z = 1 - 2x^2 - y^2$ limitada pela superfície $16x^2 + 4y^2 = 1$.

**Resp.** (a) $4\pi(2 - \sqrt{2})$, (b) $8\pi$, (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi - 2)$, (g) $4\pi$.

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\iint_S y\, d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$;

(b) $\iint_S x^2\, d\sigma$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c) $\iint_S yz\, d\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

(d) $\iint_S xy\, d\sigma$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$;

(e) $\iint_S z(x^2 + y^2)\, d\sigma$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$;

(f) $\iint_S xyz\, d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(g) $\iint_S (x+1) d\sigma$, onde S é a parte de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$.

**Resp.** (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, , (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $\frac{-\pi}{4}(8 + \sqrt{2})$, (e) $16\pi$, (f) $0$, (g) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x, y, z)$ a densidade pontual de massa para:

(a) S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ contida no primeiro octante e $\delta(x, y, z) = y$.

(b) S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 2)$ e $\delta(x, y, z) = xz$.

(c) S é a parte do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ contida no semi espaço $x \geqslant 0$ e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(d) S é a parte de $z = \ln(x^2 + y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = e^2$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

**Resp.** (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17} - 2347)$.

5. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 y\vec{\imath} - 3xy^2\vec{\jmath} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geqslant 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é $\vec{k}$;

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{\imath} + xy\vec{\jmath} + xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$;

(c) $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$;

(d) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

(e) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + 3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é $\vec{k}$;

(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{\imath} - z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$;

(g) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;

(h) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\vec{\imath} - (2y + 1)\vec{\jmath} + z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{\jmath} > 0$;

(i) $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{\imath}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é $\vec{\imath}$;

(j) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4 - x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{\imath} > 0$;

(k) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ e $S$ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{k} < 0$.

**Resp.** (a) $0$, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) $108\pi$, (e) $128\pi$, (f) $-\pi/2$, (g) $48$, (h) $-1$, (i) $0$, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

6. Calcule

(a) $\displaystyle\iint_S xz\, dy\wedge dz + yz\, dz\wedge dx + x^2\, dx\wedge dy$, onde $S$ é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$, $z \geqslant 0$, orientada segundo a normal exterior;

**Resp.** $3\pi a^4/4$.

(b) $\displaystyle\iint_S x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte do plano $x+y+z=2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{j} > 0$;

**Resp.** $4$.

(c) $\displaystyle\iint_S x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $z \geqslant 2y+1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{k} \geqslant 0$. **Resp.** $28\pi$.

7. Suponha que a superfície $S$ seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{n}$ tenha a terceira componente não-negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre $S$, mostre que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dx\, dy.$$

8. Calcule $\displaystyle\iint_S y^2z^2 dy\wedge dz + x dz\wedge dx + y dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte da superfície $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y+3$, orientada com $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k} < 0$.
**Resp.** $54\pi$.

9. Calcule $\iint_S e^{z^2}\ln(z+y)dy\wedge dz+(x^2+z^2)dz\wedge dx+zdx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z=4-x^2-y^2$ limitado pelo plano $z=y+4$, orientada com $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k}\geqslant 0$. **Resp.** $-\frac{35\pi}{16}$

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}+2xy\vec{j}+3xy\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira da parte do plano $3x+y+z=3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário; **Resp.**$\frac{7}{2}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z)=(z^2+e^{x^2})\vec{i}+(y^2+\ln(1+y^2))\vec{j}+(xy+\sin z^3)\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira do triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário; **Resp.**$\frac{4}{3}$.

(c) $\vec{F}(x,y,z)=(2z+\sin e^{x^3})\vec{i}+4x\vec{j}+(5y+\sin(\sin z^2))\vec{k}$ e $\gamma$ é a a intersecção do plano $z=x+4$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário; **Resp.**$-4\pi$.

(d) $\vec{F}(x,y,z)=(x+\cos(x^3))\vec{i}+y\vec{j}+(x^2-y^2+z^{100})\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira da parte do parabolóide $z=1-x^2-y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário; **Resp.**$-1$.

(e) $\vec{F}(x,y,z)=(y+z)\vec{i}+(2x+(1+y^2)^{20})\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$ e $\gamma$ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $z=y$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário; **Resp.** $\pi$.

(f) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e $\gamma$ é a intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ com o plano $x+y+z=0$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário. **Resp.** $-a^2\pi\sqrt{3}$.