MAT2219— Lista 4

1. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no sentido horário. Dê todos os valores possíveis para

$$(a) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}. \qquad (b) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}.$$

Resp. (a) 0 ou -2π; (b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$.

2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}} + 3x\right)$ se

(a) γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. -8π.

(b) γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. -14π.

3. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

Resp. Não.

(b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

Resp. $f(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

Resp. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz$.

(d) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$;

Resp. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

(e) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

Resp. $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

4. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma (-2xy + x^2)\,dx + \sqrt{8-y^7}\,dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente.

Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + (2y\ln(x^2+1))dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2+y^2=1$ do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\frac{1}{2},0)$ percorrido no sentido anti-horário.

Resp. 0.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}+xy\right) dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geqslant x-1$ e $y^2 \leqslant x+1$, orientada no sentido anti horário.

Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma (2xy+\mathrm{sen}(y))dx + x\cos(y)dy + x^2 dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2+y^2+z^2=1$ e $y=x$, no 1^o octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário.

Resp. $\frac{1}{12}\left(6\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário. O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

Resp. -2π.

5. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t,\ \mathrm{sen}t)$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.

Resp. π.

6. Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$.

Resp. 1.

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2)-y]\,dx + [2y\ln(x+y^2)-x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2+y^2=1$ com $y \geqslant 0$ orientada no sentido horário.

Resp. $3\ln 3 - 2$.

7. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$.

Resp. $a^2b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \operatorname{sen} y \, dx + x \cos y \, dy$.

Resp. $a \operatorname{sen} b$.