

MAT2219 — Lista 3

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a)

$$\int_{\gamma} x \, ds, \quad \gamma(t) = (t^3, t), 0 \leq t \leq 1.$$

Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.

(b) $\int_{\gamma} xy^4 \, ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \geq 0$. **Resp.** $1638, 4$.

(c) $\int_{\gamma} (x - 2y^2) \, dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. **Resp.** 48 .

(d) $\int_{\gamma} xy \, dx + (x - y) \, dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. **Resp.** $\frac{17}{3}$.

(e)

$$\int_{\gamma} xyz \, ds, \gamma : x = 2t, y = 3 \sin t, z = 3 \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

(f) $\int_{\gamma} xy^2z \, ds$, γ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$. **Resp.** $3\sqrt{35}$.

2. Calcule o comprimento das curvas

(a) $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$ e $a > 0$. **Resp.** $8a$.

(b) $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, onde $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. **Resp.** $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

(c) $\gamma(t) = (t, \frac{3t^2}{2}, \frac{3t^2}{2})$, onde $0 \leq t \leq 2$. **Resp.** $\sqrt{73} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(6\sqrt{2} + \sqrt{73})$.

3. (a) Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$.

Resp. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

(b) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade é $\delta(x, y) = x^2$, determine a massa do cabo. **Resp.** 4π .

(c) Determine a massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade é uma constante k . **Resp.** $2\sqrt{13}k\pi$.

4. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. **Resp.** $-\frac{11}{15}$.

(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$. **Resp.** 1.

5. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π .

(b) $\vec{F}(x, y, z) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

Resp. $-\pi ab$.

(c) $\int_{\gamma} x^3 y^2 z \, dz$, γ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$. **Resp.** $\frac{16}{11}$.

(d) $\int_{\gamma} z^2 \, dx - z \, dy + 2y \, dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(0, 1, 1)$, de $(0, 1, 1)$ a $(1, 2, 3)$ e de $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$. **Resp.** $\frac{77}{6}$.

6. Calcule

(a) $\int_{\gamma} x \, dx + (y + x) \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. **Resp.** $-\pi$.

(b) $\int_{\gamma} (2y + 1) \, dx + z \, dy + x \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geq 0$, $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$. **Resp.** -2 .

(c) $\int_{\gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário. **Resp.** $2\pi\sqrt{2}$.

(d) $\int_{\gamma} x \, dx + (y + x) \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. **Resp.** $-\pi$.

(e) $\int_{\gamma} x^2 \, dx + x \, dy + z \, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. **Resp.** 6π

7. Calcule

(a) $\int_{\gamma} 2x \, dx + (z^2 - \frac{y^2}{2}) \, dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 2)$. **Resp.** 8 .

(b) $\int_{\gamma} \frac{(x + y) \, dx - (x - y) \, dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário. **Resp.** 2π .

(c) $\int_{\gamma} \sqrt{y} \, dx + \sqrt{x} \, dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário. **Resp.** $-\frac{3}{10}$.

8. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da cicloide $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. **Resp.** $2\pi^2$.

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_{\gamma} x^2y \, dx + xy^3 \, dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, orientado positivamente. **Resp.** $-1/12$.

(b) $\oint_{\gamma} (x + 2y) \, dx + (x - 2y) \, dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$, orientada positivamente. **Resp.** $-1/6$.

(c) $\oint_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. **Resp.** $1/3$.

(d) $\oint_{\gamma} x^2 dx + y^2 dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. **Resp.** 0 .

(e) $\oint_{\gamma} xy dx + 2x^2 dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2, 0)$ a $(2, 0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada positivamente. **Resp.** 0 .

(f) $\oint_{\gamma} (xy + e^{x^2}) dx + (x^2 - \ln(1 + y)) dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e do arco da curva $y = \sin x$, orientada positivamente. **Resp.** π .

(g) $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 0)$. **Resp.** $\pi + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$.

10. (a) Seja D uma região limitada de \mathbb{R}^2 com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D é

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} -y dx.$$

(b) Usando (a) calcule a área de

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$; (ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$. **Resp.** (i) $ab\pi$; (ii) $\frac{3}{8}a^6\pi$.

(c) Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \sin^3 t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resp. $\frac{3\pi}{8}$.

11. Calcule

(a) $\int_{\gamma} x^2(5y dx + 7x dy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0, -2)$ a $(0, 2)$ com $x \geq 0$.

Resp. $e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{125}{2}\pi$.

(b) $\int_{\gamma} (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^2e^y + \text{sen } y) dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ com $y \geq 0$. **Resp.** $4 - \frac{3\pi}{4}$.

(c) $\int_{\gamma} \vec{v} dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1, 2] \times [-1, 1]$ e $\vec{v}(x, y) = 2 \arctg(\frac{y}{x}) \vec{i} + (\ln(x^2 + y^2) + 2x) \vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário. **Resp.** 4.

12. Calcule

(a) $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x + 2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário; **Resp.** -2π .

(b) $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 2$, percorrida do ponto $(-1, 2)$ a $(2, 5)$. **Resp.** $\frac{1}{2} \ln \frac{29}{5}$.

(c) $\int_{\gamma} \frac{y dx - (x - 1) dy}{(x - 1)^2 + y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido horário. **Resp.** 2π .