

MAT2219— Lista 2

1. Determine a massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade δ nos seguintes casos:

(a) $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $\delta(x, y) = x^2$.

(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\delta(x, y) = x + y$.

(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\delta(x, y) = xy$.

(d) D é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\delta(x, y) = 3$.

(e) $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ e $\delta(x, y) = y$.

Resp. (a) $\frac{2}{3}$, (b) 6, (c) $\frac{1}{6}$, (d) $\frac{27}{2}$, (e) $\frac{\pi}{4}$.

2. (a) Calcule a massa de $D = \{(x, y) : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$, com densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$. **Resp.** 150π .

(b) Calcule a massa de $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1\}$ com densidade $\delta(x, y) = e^{y^4} + \sqrt[3]{x^2}$. **Resp.** $\frac{1}{4}(e - \frac{3}{5})$.

3. Calcule as integrais iteradas:

(a)

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz \, dx dy dz$$

(b)

$$\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y \, dx dz dy.$$

Resp. (a) $\frac{1}{48}$, (b) $\frac{16}{3}$.

4. Calcule as integrais triplas:

(a)

$$\iiint_D yz \, dx dy dz,$$

onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.

(b)

$$\iiint_D y \, dx dy dz,$$

onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c)

$$\iiint_D xy \, dx dy dz,$$

onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

(d)

$$\iiint_D z \, dx dy dz,$$

onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e)

$$\iiint_D x \, dx dy dz,$$

onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

5. Determine a massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. **Resp.** a^5 .

6. Calcule as seguintes integrais:

(a)

$$\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx dy dz,$$

onde D é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

(b)

$$\iiint_D y \, dx dy dz,$$

onde D é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

(c)

$$\iiint_D x^2 \, dx dy dz,$$

onde D é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $z \geq 0$. **Resp.** (a) 24π , (b) 0 , (c) $2\pi/5$.

7. Determine o volume da região S limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Resp. 162π .

8. Determine a massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ o pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K. **Resp.** $\pi K a^2/8$.

9. Calcule as integrais:

(a)

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

onde D é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b)

$$\iiint_D y^2 \, dx \, dy \, dz,$$

onde D é a parte da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ contida no primeiro octante.

(c)

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

onde D é a região interior ao cone de ângulo $\pi/6$ e à esfera de raio 2.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $\pi/30$, (c) $4\pi(2 - \sqrt{3})$.

10. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **Resp.** $\frac{4}{3}\pi abc$.

11. Calcule a integral $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$, onde $D = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$. **Resp.** 3π .

12. Calcule a massa do sólido $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq a > 0\}$, com $a < b$ e $\delta(x, y, z) = z$.

Resp. $\frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)^2$.

13. (a) Calcule o volume da região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Resp. $\frac{a^3\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

(b) Calcule a massa da região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $a > 0$ com $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ **Resp.** $\frac{11}{30}\pi a^5$.

(c) Calcule

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

onde D é o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ **Resp.** $\frac{(9\sqrt{3}-4\sqrt{2})\pi}{20}$.

14. Calcule a massa da região R limitada por:

(a) $z(x^2 + y^2) = 2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ e $\delta(x, y, z) = 1$ **Resp.** $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(b) $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$, para $x \geq 0$ com $\delta(x, y, z) = 1$ **Resp.** $\frac{32}{9}$.

(c) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = 4$ com $\delta(x, y, z) = |z|$; **Resp.** $\frac{9\pi}{2}$.

(d) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x, y, z) = |z|$; **Resp.** πa^2 .

(e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + z^2$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z^2$ com $\delta(x, y, z) = 1$; **Resp.** 8π .

(f) $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = 2 + 2z^2$, para $|z| \leq a$ com $\delta(x, y, z) = z^2$. **Resp.** $2\pi(\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3})$.

15. (a) Calcule

$$\iiint_D (x + y + z)(x + y - z) \, dx \, dy \, dz$$

para D limitada por: $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $x + y - z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y - z = 1$ e $x - y - z = 2$; **Resp.** $\frac{3}{4}$.

(b) Calcule a massa do sólido

$D = \{(x, y, z) \mid (x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y-z)^2 \leq 25, \ x+y+z \geq 0, \ x+y-z \geq 0\}$,

onde a densidade é $\delta(x, y, z) = (x + y + z)(x + y - z)$. **Resp.** $\frac{625}{6}$.

16. Calcule

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz,$$

onde D é limitada por:

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 + z^2$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 + \frac{z^2}{2}$, para $z \geq 0$. **Resp.** 27π .

(b) $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$; $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 4$. **Resp.** 2π .