MAT2219 - Lista 1

Professora Nataliia Goloshchapova

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_R (2y^2 - 3xy^3)\,dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$. **Resposta** (a) $-\frac{585}{8}$.

(b)

$$\iint_R x \sin y \, dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}\}$. **Resposta** (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$.

(c)

$$\iint_R \frac{1}{x+y}\, dxdy,$$

onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$. **Resposta** (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. **Resposta** $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$.

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. **Resposta** 36.

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dydx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dxdy.$$ **Resposta** $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_D xy\, dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$. **Resposta** (a) $\frac{1}{12}$.

(b)

$$\iint_D (x^2 - 2xy)\, dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 - x\}$. **Resposta** (b) $-\frac{19}{42}$.

(c)

$$\iint_D e^{x/y}\, dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) : 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^3\}$. **Resposta** (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.

(d)

$$\iint_D x \cos y\, dx dy,$$

onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.
Resposta (d) $(1 - \cos 1)/2$.

(e)

$$\iint_D 4y^3\, dx dy,$$

onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. **Resposta** (e) $\frac{500}{3}$.

(f)

$$\iint_D xy\, dx dy,$$

onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. **Resposta** (f) $\frac{1}{8}$.

(g)

$$\iint_D (x^2 \mathrm{tg} x + y^3 + 4)\, dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. **Resposta** (g) 8π.

(h) Calcule

$$\iint_D e^{y-x}\, dx dy$$

sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$.

Resposta (h) $\frac{e^2}{2}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. **Resposta** (a) $\frac{6}{35}$.

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. **Resposta** (b) $\frac{31}{8}$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano
$x + 2y = 2$. **Resposta** (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{2}{3})$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
Resposta (d) $\frac{1}{6}$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. **Resposta** (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.
Resposta (f) $\frac{16}{3}a^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla
$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas
$y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\, dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dydx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx dy.$

Resposta (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e - 1)$, (e) $\frac{1}{2}(\sin(1) - 1)$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\iint_R x\, dx dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\displaystyle\iint_R xy\, dx dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(d) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dx dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(e) $\displaystyle\iint_D (e^{-x^2 - y^2})\, dx dy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y.

(f) $\displaystyle\iint_D \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\, dx dy$ sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$.

Resposta (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Seja B o conjunto $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, a > 0, b > 0.$ Verifique que

$$\iint_B f(x, y) = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) d\rho \right] d\theta.$$

11. Seja B o conjunto $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant r^2$ ($r > 0$, α e β são números reais) Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^r \rho g(\theta,\rho)d\rho\right]d\theta.$$

onde $g(\theta,\rho) = f(x,y), x = \alpha + \rho\cos\theta$ e $y = \beta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$.
12. Calcule a seguinte integral

$$\iint_B \arctan(y/x)dxdy$$

onde B é a região do primeiro quadrante, limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x, y = \sqrt{3}$.

Resposta $\frac{7\pi^2}{192}$.