Aula 1. Revisão da integral (definida e indefinida)

1.1 Lembrete sobre a integral

1.1.1 Definições e notações

- Seja $f(x)$ uma função real de uma variável. Uma *primitiva* da $f(x)$ é uma função $F(x)$ cuja derivada $F'(x)$ é igual a $f(x)$, ou seja $F'(x) = f(x)$.
- *Integral indefinida* da f é conjunto de todas as primitivas da f. **Notação:** $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- *Integral definida* dada pela fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é qualquer primitiva da $f(x)$.

Algumas regras da Integração:

1. $\int dx = x + C$,
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$,
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,
4. $\int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + C$,
5. $\int \text{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$,
6. $\int e^x dx = e^x + C$.

1.1.2 Regras da Integração [Substituição e Integração por partes]

Integração pela substituição:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,}$$

onde $u = g(x)$.

Integração por partes:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.}$$

1.2 Exemplos e Exercícios

Exercício 1.1

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} dx.$$

Solução 1.1

Temos

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx = \int \left[2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right]dx = 2x - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

LEMBRETE:

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
2. $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot \int f(x)dx.$

Exercício 1.2

Calcule $\int e^{-x}dx$.

Solução 1.2

Temos

$$\begin{aligned}\int e^{-x}dx &= \int e^{-x}\cdot(-1)d(-x) = \\ &= -\int e^{-x}d(-x) = \left|u=-x\right| = \\ &= -\int e^{u}du = -e^{u}+C = -e^{-x}+C.\end{aligned}$$

Exercício 1.3

Calcule $\int (x+2)^{13}dx$.

Solução 1.3

Temos

$$\begin{aligned}\int (x+2)^{13}dx &= \left|\begin{array}{c} x+2=u \\ dx=du \end{array}\right| = \\ &= \int u^{13}du = \frac{u^{14}}{14}+C = \frac{(x+2)^{14}}{14}+C.\end{aligned}$$

Exercício 1.4

Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\,dx$.

Solução 1.4

Temos

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = \text{sen}\, x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = $$
$$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C.$$

Exercício 1.5

Calcule $\int xe^{-x^2} dx$.

Solução 1.5

Temos

$$\int xe^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = -x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right| = $$
$$= -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Exercício 1.6

Calcule $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$.

Solução 1.6

Temos

$$\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = $$
$$= \int \cos u \; du = \text{sen}\, u + C = \text{sen}(\ln x) + C.$$

Exercício 1.7

Calcule $\int x \cdot \text{sen}\, x \; dx$.

Solução 1.7

Temos

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \operatorname{sen} x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Exercício 1.8

Calcule $\int x \cdot \ln x \, dx$.

Solução 1.8

Temos

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Exercício 1.9

Calcule $\int x^2 \cdot e^x \, dx$.

Solução 1.9

Temos

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array} \right| =$$
$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C.$$

Exercício 1.10

Calcule $\int (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t} \, dt$.

Solução 1.10

Temos

$$\int (t^2+1)\cdot\sqrt{t}\,dt = \int (t^2+1)\cdot t^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \int t^{\frac{5}{2}}dt + \int t^{\frac{1}{2}}dt = 2\Big[\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big] + C.$$

Exercício 1.11

Calcule $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$.

Solução 1.11

Temos

$$\int e^x\cdot \operatorname{sen} x\,dx = \left|\begin{array}{cc} f(x)=e^x & f'(x)=e^x \\ g'(x)=\operatorname{sen} x & g(x)=-\cos x\end{array}\right|$$

$$= -e^x\cdot\cos x + \int e^x\cdot \cos x dx = \left|\begin{array}{cc} f(x)=e^x & f'(x)=e^x \\ g'(x)=\cos x & g(x)=\operatorname{sen} x\end{array}\right|$$

$$= -e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\operatorname{sen} x - \int e^x\cdot\operatorname{sen} x\,dx.$$

Assim temos que

$$\int e^x\cdot\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}\big[e^x\cdot\operatorname{sen} x - e^x\cdot\cos x\big] + C.$$

Exercício 1.12

Calcule $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

Solução 1.12

Temos

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \left|\begin{array}{c} u=e^x \\ du=e^x dx\end{array}\right| = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}(e^x) + C.$$

Mais regras de Integração:

7. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C,$
8. $\int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C,$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C,$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \arctan\frac{x}{a} + C.$

Exercício 1.13

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x] dx$.

Solução 1.13

Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x] dx &= \Big(-\cos x - \frac{\cos 2x}{2} \Big) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\cos \frac{\pi}{3} - \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2} + \cos 0 + \frac{\cos 0}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.14

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$.

Solução 1.14

Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \big(\tan x - x \big) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.15

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$.

Solução 1.15

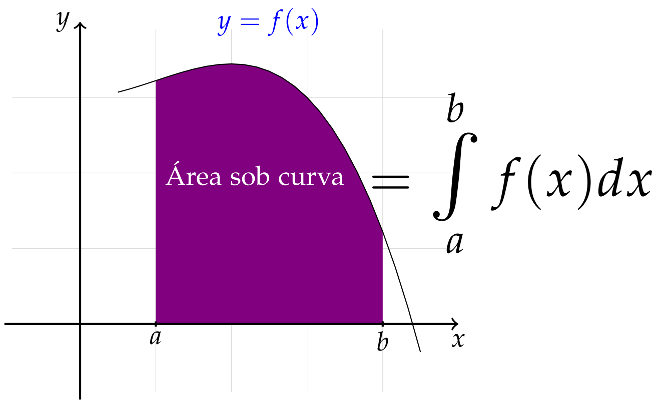
Temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

LEMBRETE:

1. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
2. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Lembrete



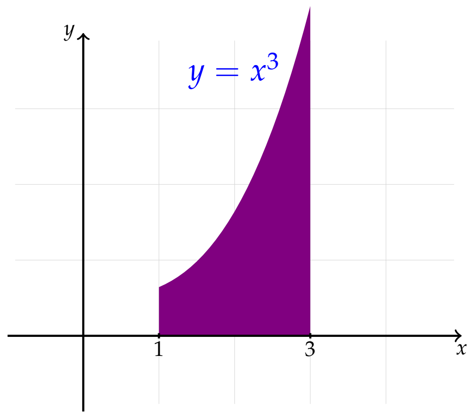
Exercício 1.16

Calcule a área do conjunto A limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e pelo grafico $y = x^3$.

Solução 1.16

Temos

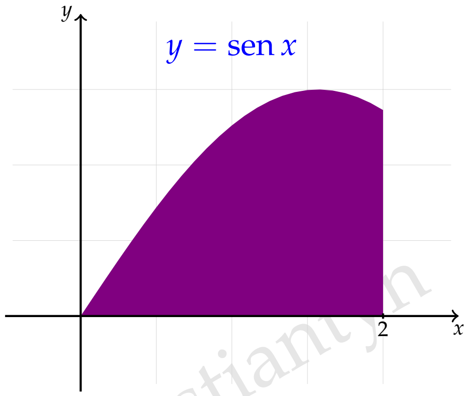
$$\text{Área} = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$



Exercício 1.17

Calcule a área do conjunto

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le y \le \operatorname{sen} x \\ 0 \le x \le 2 \end{array} \right\}.$$

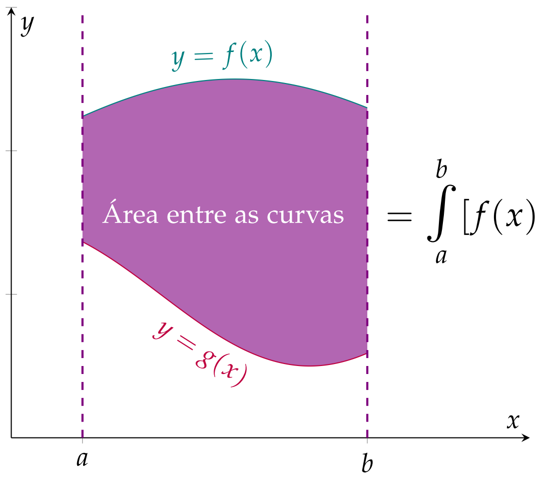


Solução 1.17

Temos

$$\text{Área} = \int_0^2 \operatorname{sen} x dx = -\cos x\Big|_0^2 = 1 - \cos 2.$$

Lembrete

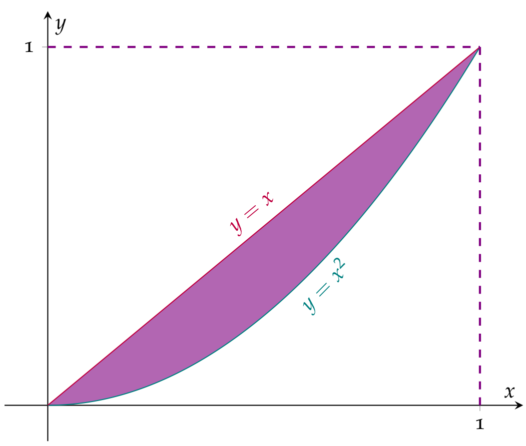


$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Exercício 1.18

Calcule a área do conjunto

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{array} \right\}.$$



Solução 1.18

Temos

$$\text{Área} = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

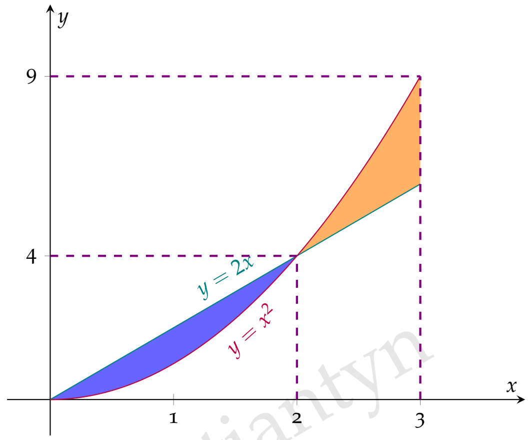
Exercício 1.19

Calcule a área do conjunto delimitado por $0 \leq x \leq 3$, $y = x^2$ e $y = 2x$.

Solução 1.19

Temos

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \text{Área azul} + \text{Área laranja} \\
&= \int_0^2 (2x - x^2)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx \\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]\Big|_2^3 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$



Exercício 1.20: (Trabalho p/ casa)

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}{x - 1}dx$; **Resp:** $\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 3\arccos(\frac{3}{x-1}) + C$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x}dx$, **Resposta:** $\frac{3}{4}x(1 + 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{16}(1 + 2x)^{\frac{5}{2}} + C$;

(c) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx$, **Resposta:** $\frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$;

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$, **Resposta:** $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}dx$, **Resposta:** $\ln(e^x + 1) + C$.

Exercício 1.21: (Trabalho p/ casa)

Para os itens abaixo desenhe a região entre as curvas e calcule a área da região:

(a) $y = x^2$, $y = -x^2 + 8x$; **Resposta:** $\frac{64}{3}$

(b) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, e $x = 3$; **Resposta:** $\ln(3) - \frac{26}{81}$

(c) $y = \cos x$ e $y = \cos 2x$ em $x \in [-\pi, \pi]$; **Resposta:** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

(d) $y = e^x$, $y = e^{2x-1}$, e $x = 0$; **Resposta:** $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) - 1$

(e) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -1$ e $x = 1$; **Resposta:** $2(e + \frac{1}{e} - 2)$.