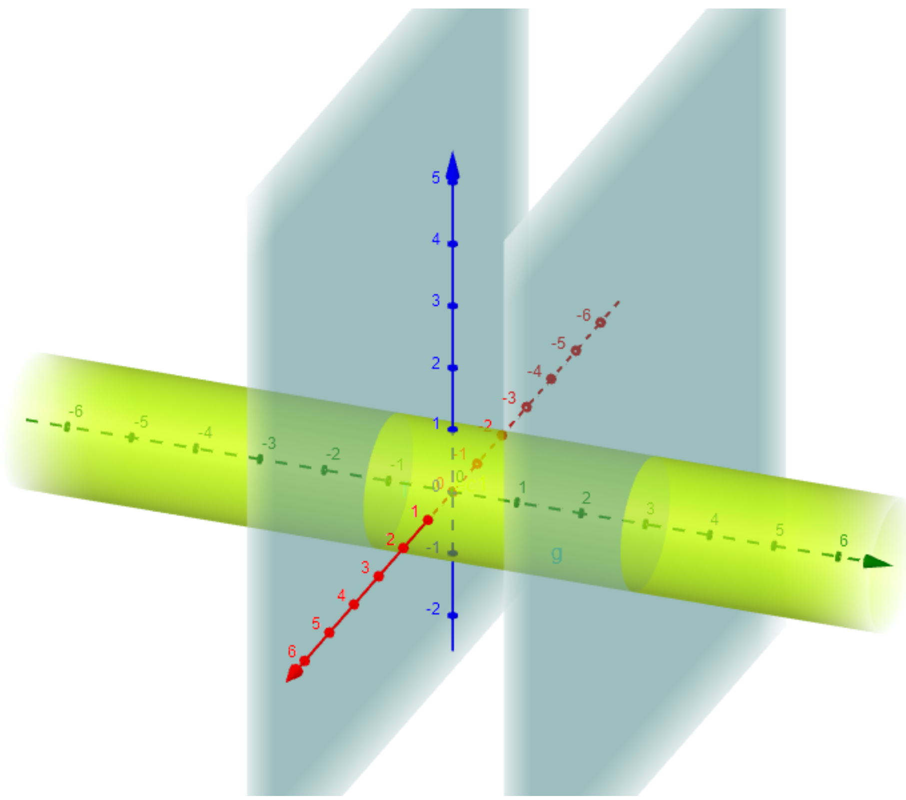
Gabarito
MAT2219 — Lista 5

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área.
(b). S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$.

Demonstração. Vamos considerar a seguinte parametrização

$$X(\theta, \rho) = (\cos\theta, \rho, \sin\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad -1 \leqslant \rho \leqslant 3$$



temos que a área esta dado por:

$$A = \iint_K \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial \rho} \right\| d\theta d\rho$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial \rho} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\vec{\imath}\cos\theta - \vec{\jmath}0 + \vec{k}(-\sin\theta). \\
\left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial \rho} \right\| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= 1
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{3} 1 d\rho d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 4 \cdot 2\pi \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

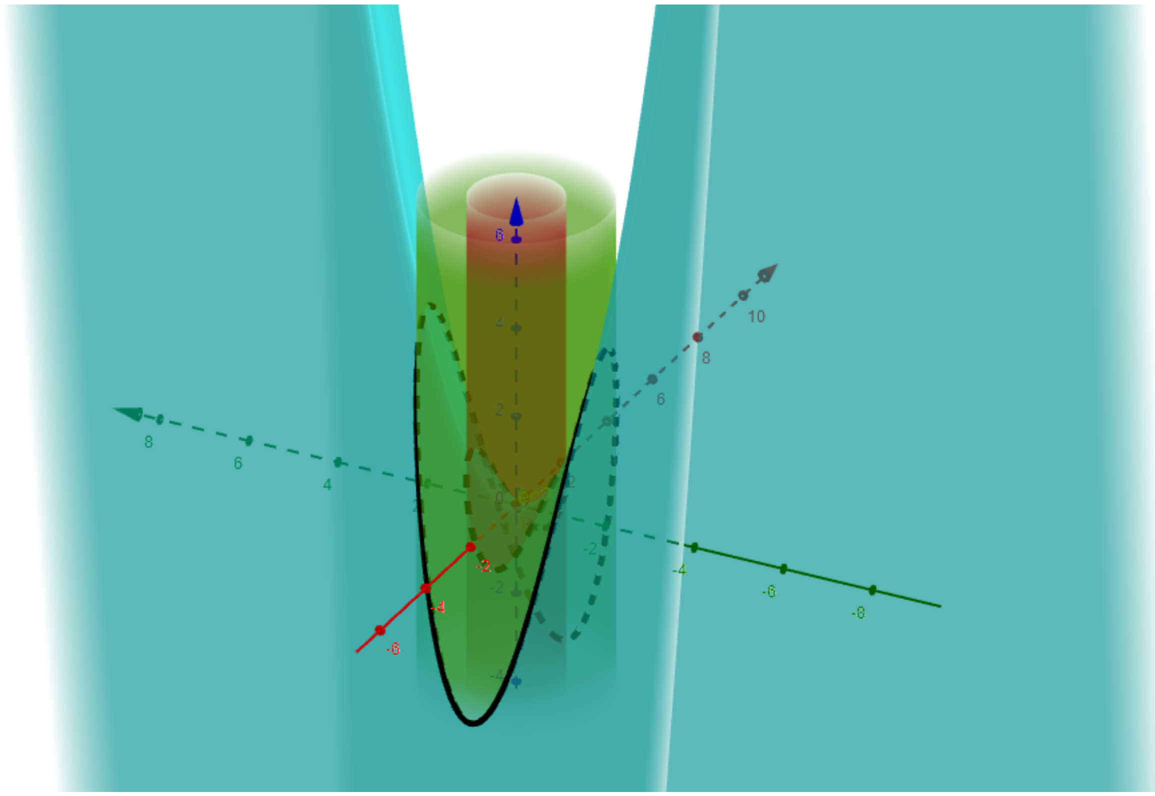
□

(d) S é a parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que esta entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Demonstração. Vamos considerar a parametrização

$$X(x, y) = (x, y, y^2 - x^2), \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$$

Observe a seguinte figura da superfície



A área esta determinada pela formula

$$A = \iint_K \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\| dxdy, \quad K = \left\{ (x,y) \,|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}.$$

Por tanto, por calculo direito temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} =& \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \\ =& \vec{i}(2x) - \vec{j}(2y) + \vec{k}1. \\ \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\| =& \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\iint_K \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{4\rho^2+1}\,\rho d\rho d\theta,$$

isso foi usando mudança de coordenadas para coordenadas polares. Para calcular esta ultima integral vamos usar a integral auxiliar

$$\boxed{\int \sqrt{4\rho^2+1}\,\rho d\rho = \frac{1}{12}(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}} + c}$$

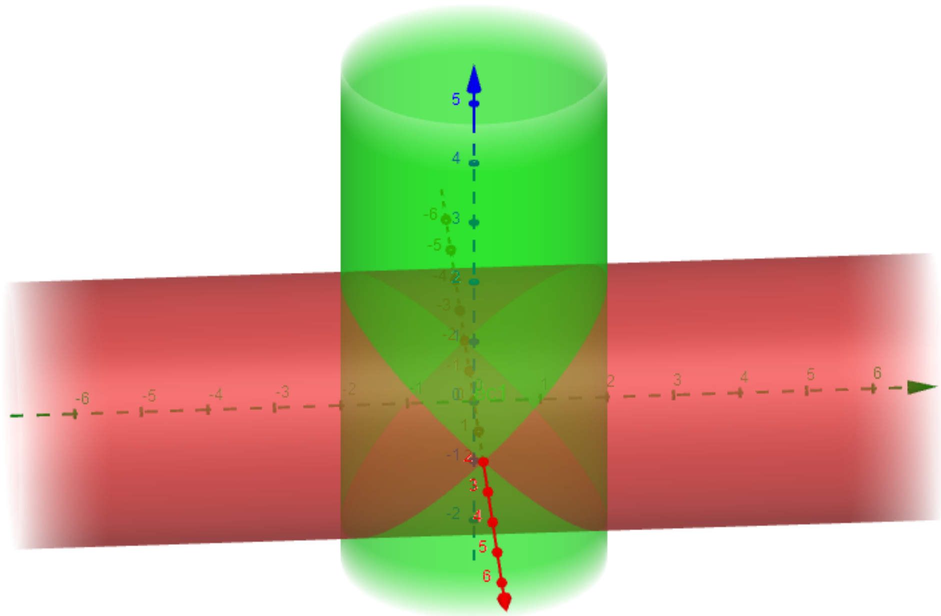
Logo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{4\rho^2+1}\,\rho d\rho d\theta =& 2\pi\int_1^2 \sqrt{4\rho^2+1}\,\rho d\rho \\ =& 2\pi\left(\frac{1}{12}(16+1)^{3/2} - \frac{1}{12}5^{3/2}\right) \\ =& \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).\end{aligned}$$

□

(e) S é a parte do cilindro $x^2+z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Demonstração. Consideremos a seguinte figura



Usando a simetria da superfície vemos que uma parametrização para a parte superior de esta superfície é dada por

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2}), \quad 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

Para calcular a área da parte superior da superficial precisamos de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) - \vec{j}0 + \vec{k}1 \end{aligned}$$

Logo

$$\left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2} + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

assim a área superficial é o duplo de

$$\frac{A}{2} = \iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dy$$

Por ultimo para calcular este integral vamos considerar a seguinte parametrização da região de integração

$$\begin{aligned} R =& \left\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a^2\right\} \\ =& \left\{-a \leqslant x \leqslant a, \quad -\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}\right\} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} =& \iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dy \\ =& \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \\ =& \int_{-a}^{a} \frac{2a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ =& 2a \int_{-a}^{a} dx \\ =& 4a^2 \end{aligned}$$

Em conclusão dado que temos calculado só área superior da superfície, então a área da superfície e o duplo desta área, i.e.,

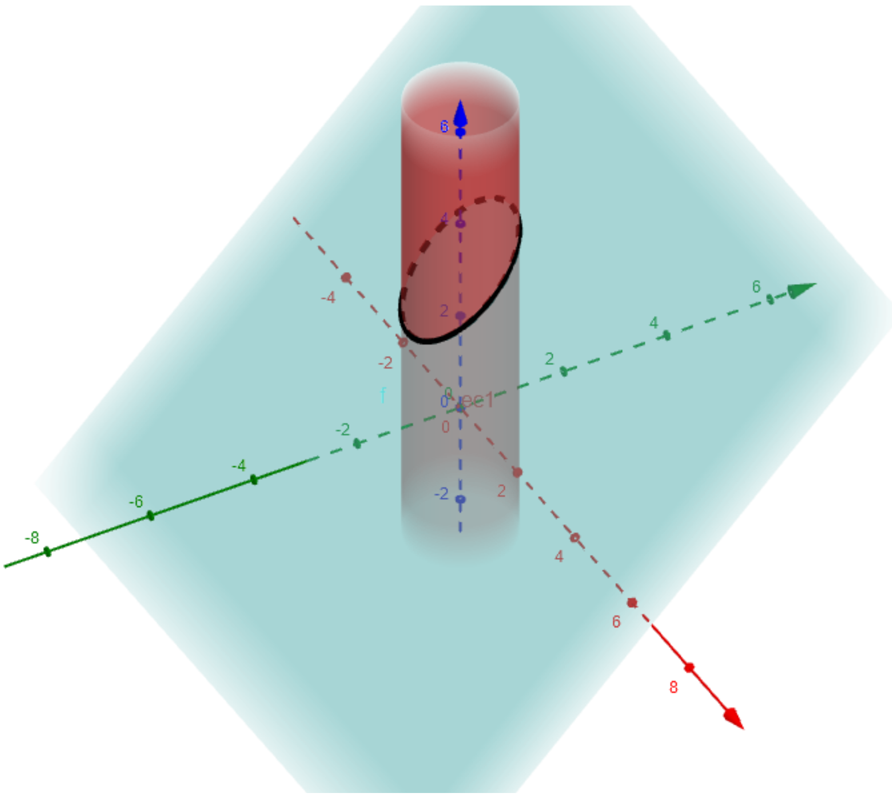
$$A = 2 \cdot 4a^2 = 8a^2.$$

□

2. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(c) $\iint_S yz d\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$.

Demonstração. Considere o grafico



Tomando a parametrização

$$X(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\sin\theta + 3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

Logo para o calculo da integral de superfície precisamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{X}}{\partial\rho} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & \rho\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(0) + \vec{j}\rho + \vec{k}(-\rho) \\
\left\| \frac{\partial\vec{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{X}}{\partial\rho} \right\| &= \sqrt{2}\rho
\end{aligned}$$

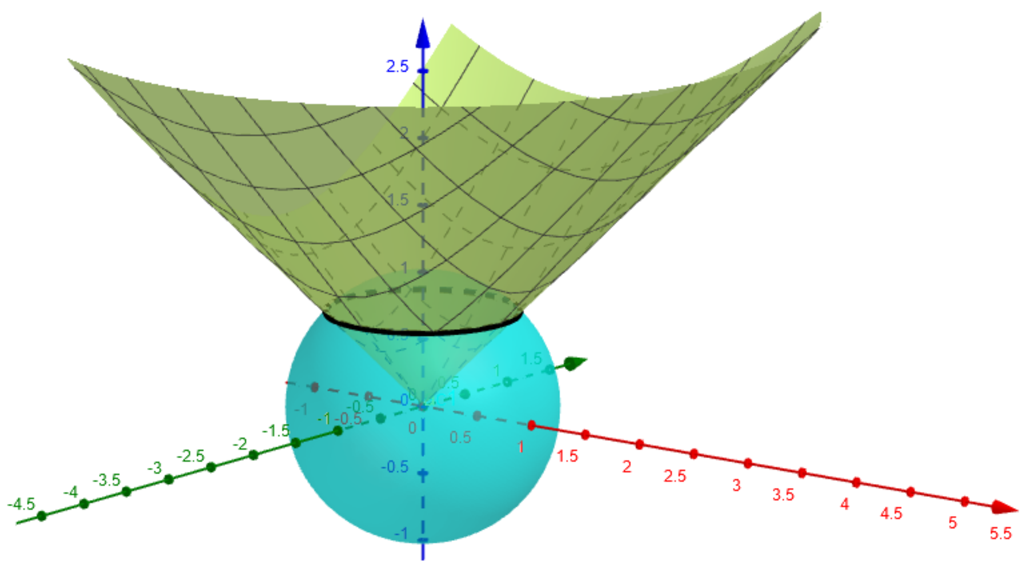
Agora a integral é

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sin\theta(\rho\sin\theta+3)\sqrt{2}\rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2}\rho^3\sin^2\theta d\rho + \int_0^1 \sqrt{2}\rho^2\sin\theta 3 d\rho\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2\theta d\theta + \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}+0\\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\end{aligned}$$

□

(f) $\iint_S xyz d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Demonstração. Vamos considerar o seguinte gráfico



Para a parametrização da esfera de raio 1

$$X(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

Note que para $z = \sqrt{x^2+y^2}$ temos

$$\begin{aligned} \cos\phi =& \sqrt{\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi} \\ =& \sin\phi, \\ 1 =& \tan\phi \end{aligned}$$

assim

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

Logo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Além disso note que para esta parametrização

$$\|\frac{\partial\vec{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{X}}{\partial\phi}\| = \sin\phi$$

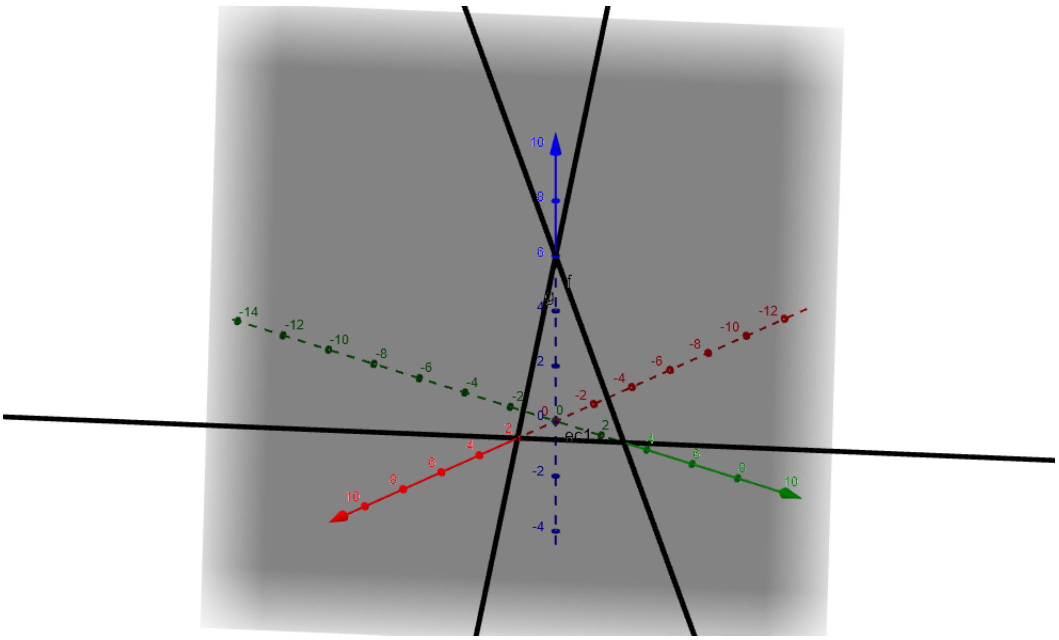
Logo a integral de superfície é

$$\begin{aligned} \iint_S xyz d\sigma =& \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \cos\theta\sin\phi\sin\theta\sin\phi\cos\phi\sin\phi d\phi d\theta \\ =& \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \sin^3\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta d\phi d\theta \\ =& \left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi}\sin^3\phi\cos\phi d\phi\right) \\ =& \left(\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi}\right)(-) \\ =& 0(-) \\ =& 0. \end{aligned}$$

$\square$

3. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x,y,z)$ é a densidade pontual de massa para:
(a) S é a parte do plano $3x+2y+z=6$ contida no primeiro octante e $\delta(x,y,z) = y$.

Demonstração. Vamos considerar inicialmente o grafico do plano



o plano $3x + 2y + z = 6$ intersecta-se com o plano xy na linha

$$3x + 2y + 0 = 6$$

do mesmo jeito com o plano yz na linha

$$3 \cdot 0 + 2y + z = 6$$

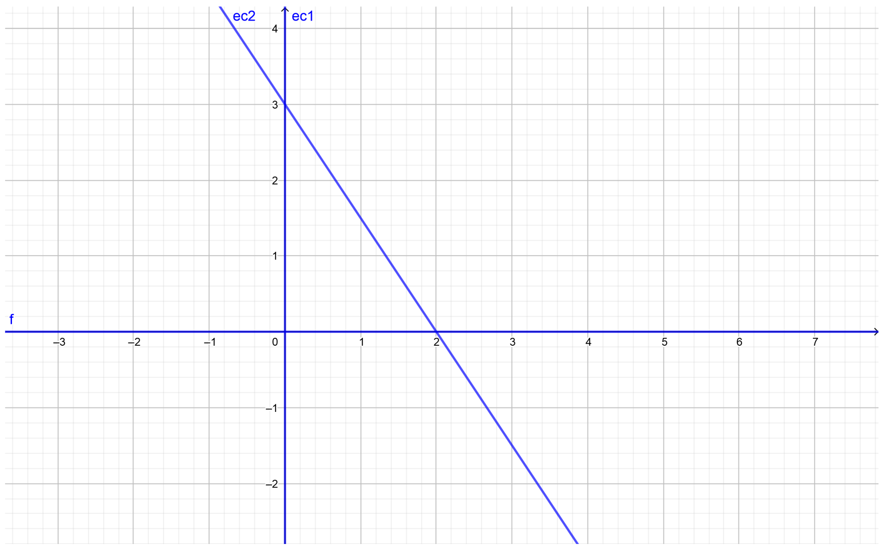
e com o plano zx na linha

$$3x + 2 \cdot 0 + z = 6$$

A superfície em questão de fato é um triângulo. Uma parametrização para esta pode ser

$$X(x, y) = (x, y, 6 - 3x - 2y)$$

onde (x, y) varia na projeção deste triângulo no plano xy, veja esta projeção no seguinte gráfico



assim uma parametrização para esta região pode ser

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3 - \frac{3}{2}x \right\}$$

Para o calculo da integral de superfície precisamos de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-3) - \vec{j}(2) + \vec{k}(1) \\ \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\| &= \sqrt{9+4+1} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

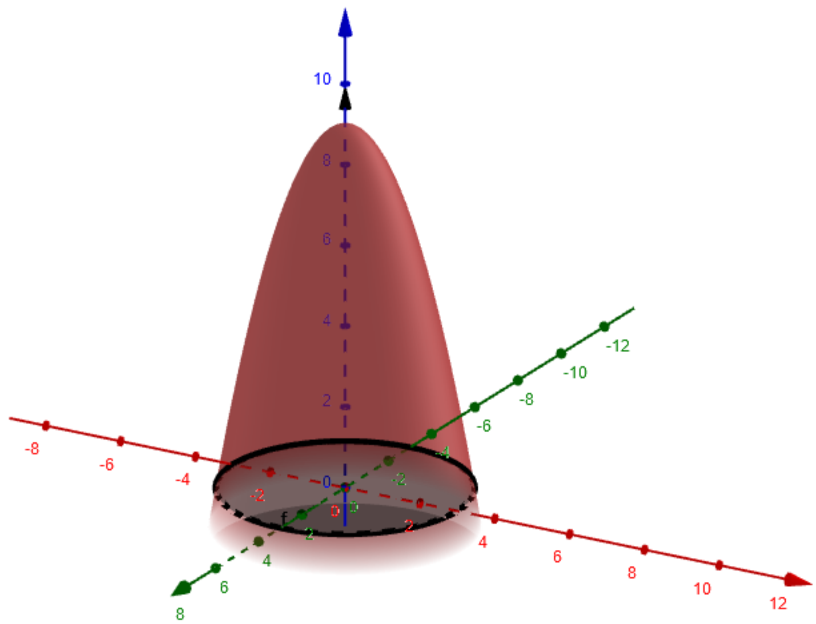
Logo a integral de superfície é

$$
\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x} y\sqrt{14}\,dx\,dy =& \int_0^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx\\
=& \int_0^2 \sqrt{14}\frac{(3-\frac{3}{2}x)^2}{2}dx\\
=& \frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{-2}{3}\right)\left.\frac{(3-\frac{3x}{2})^3}{3}\right|_0^2\\
=& 0+\frac{\sqrt{14}3^3}{9}\\
=& 3\sqrt{14}.
\end{aligned}
$$

$\square$

4. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.
(a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $0 \leqslant z$, orientada de modo que a normal no ponto $(0,0,9)$ é $\vec{k}$

Demonstração. Vejamos uma gráfica da superfície S



Calculemos o campo de vectores normal unitário $\vec{n}$ a S. Para este consideremos a parametrização

$$X(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2), \quad 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} \\
- &= \vec{i}(2x) - \vec{j}(-2y) + \vec{k}(1), \\
\left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\| &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1},
\end{aligned}$$

$$\vec{n}(x, y) = \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}.$$

Observe que de fato quando $\vec{n}(0,0,9) = \vec{k}$. Para o calculo da integral de superfície precisamos também calcular

$$\vec{F}(X(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y) = \frac{2x^3y - 6xy^2 + 4y^3}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma =& \iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 9} \frac{2x^3y - 6xy^2 + 4y^3}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \cdot \sqrt{4(x^2+y^2)+1} dxdy \\ =& \iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 9} 2x^3y - 6xy^2 + 4y^3 dxdy.\end{aligned}$$

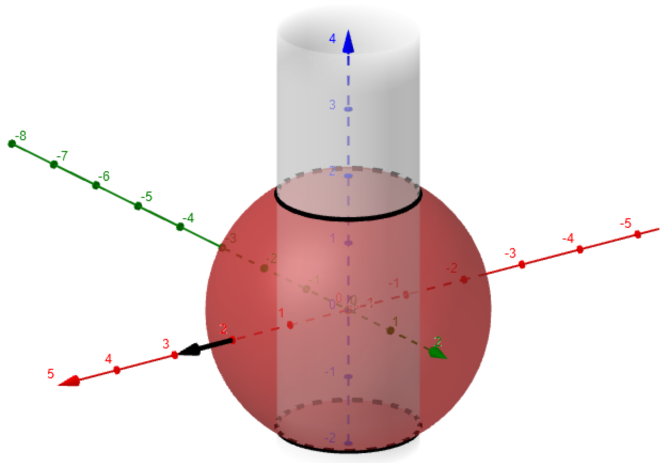
Agora para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares

$$\begin{aligned}&\iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 9} 2x^3y - 6xy^2 + 4y^3 dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (2\rho^4 \cos^3\theta \sin\theta - 6\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta + 4\rho^3 \sin^3\theta)\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^3 \cos^3\theta\sin\theta - 4\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3 \sin\theta\cos^3\theta + 4\ 4\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3 \sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{2\cdot 3^6}{6}\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\sin\theta d\theta - \frac{6\cdot 3^5}{5}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta d\theta + \frac{4\cdot 3^5}{5}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta \\ &= 0+0+0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

(i) $\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2+y^2 \leqslant 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2,0,0)$ é $\vec{i}$

Demonstração. Consideremos o seguinte gráfico de S



Lembremos que a normal a esfera com centro na origem é

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Note que de fato no ponto $(2, 0, 0)$ temos que $\vec{n} = \vec{i}$. Para $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i}$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{-xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Além disso tomando coordenadas esféricas temos que de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$ a componente z fica determinada por

$$z = 2\cos\phi, 1 + z^2 = 4 \Longrightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim

$$\phi = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}.$$

Logo uma parametrização para S é

$$X(\theta, \phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\sin\phi), \quad -\frac{\pi}{6} \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{6}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

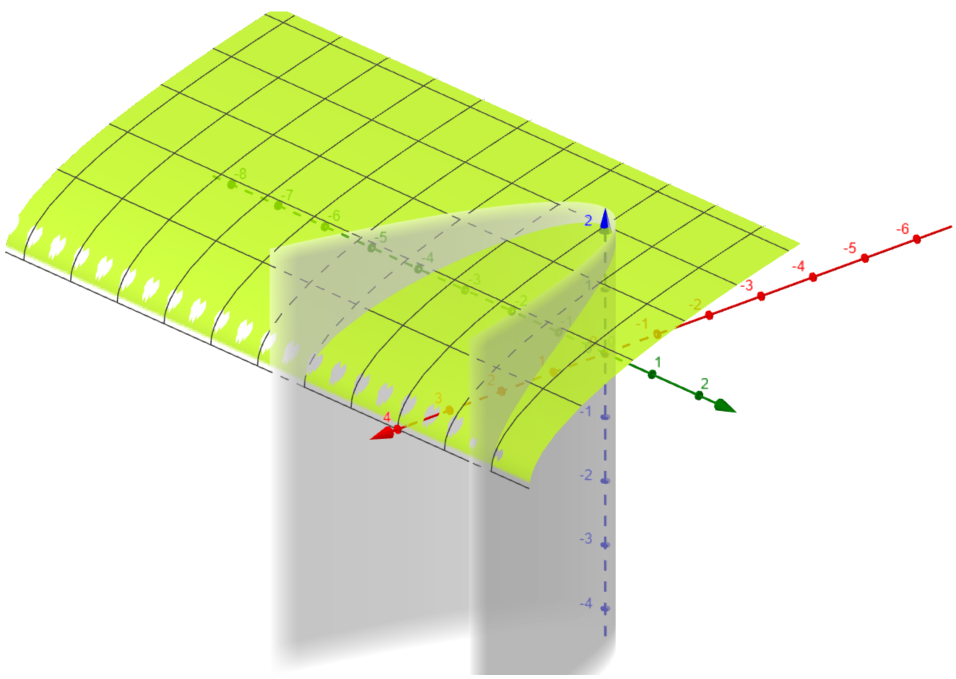
Por tanto a integral de superfície é

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma =&\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} -\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\phi\cdot 2\sin\phi d\theta d\phi\\ =&\left(-\int_0^{2\pi} 8\cos\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^3\phi\cos\phi d\phi\right)\\ =&\left(-8\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi}\right)(-)\\ =&0(-)\\ =&0\end{aligned}$$

□

(j)$\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4-x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{i} > 0$.

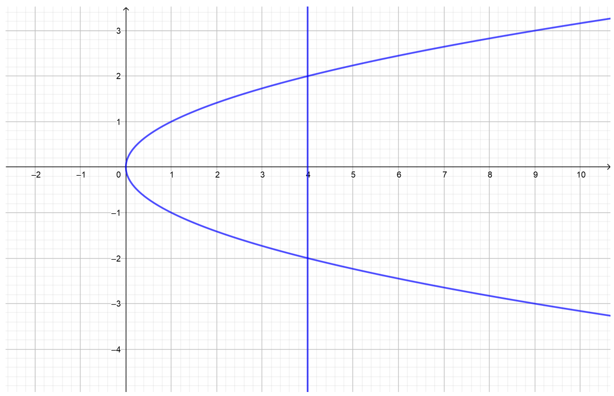
Demonstração. Consideremos um gráfico para S



Note que uma parametrização para esta superfície é

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{4-x})$$

onde (x, y) varia na projeção de S no plano xy. Note que $z = \sqrt{4-x}$ intersecta o plano xy em $x = 2$ e ademais devemos ter $y^2 = x$. Considere o gráfico seguinte



logo

$$-2 \leqslant y \leqslant 2, y^2 \leqslant x \leqslant 4$$

Para calcular a integral de superfície precisamos do campo normal a S

$$\begin{aligned}
\vec{N} =& \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \\
=& \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{4-x}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
=& \vec{i}(\frac{1}{\sqrt{4-x}}) - \vec{j}0 + \vec{k}1 \\
=& \frac{1}{\sqrt{4-x}}\vec{i} + \vec{k}.
\end{aligned}$$

Observe que $\vec{N}\cdot\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{4-x}} > 0$. Agora vamos calcular a integral de superfície

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{N} =& \frac{y}{\sqrt{4-x}} + x,\\
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma =& \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} \frac{y}{\sqrt{4-x}} + xdxdy\\
=& \int_{-2}^{2} -2\sqrt{4-x}y\Big|_{y^2}^{4} dy + \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^{4} dy\\
=& \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-y^2}ydy + \int_{-2}^{2}\frac{4^2}{2}dy - \int_{-2}^{2}\frac{y^4}{2}dy\\
=& \frac{4^2\cdot 4}{2} + \frac{-2(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-2}^{2} - \frac{2^5}{10} - \frac{2^5}{10}\\
=& \frac{320-64}{10}\\
=& \frac{120}{5}.
\end{aligned}$$

□

5. Calcule
(c) $\iint_S xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$, onde S é a parte do paraboloide $z = 4-x^2-y^2$ contida no semiespaço $2y+1 \leqslant z$, orientada de modo que sua normal satisfaz $0 \leqslant \vec{n}\cdot\vec{k}$

Demonstração. Suponha que S tem parametrização $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in K$, e $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Então a integral

$$\iint_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

é usada para representar a integral

$$\iint_K \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv$$

Por tanto, tendo isso claro vamos calcular a integral. Para compreender a superfície vamos calcular a projeção da interseção das superfícies $z = 4-x^2-y^2$ e $z = 2y+1$

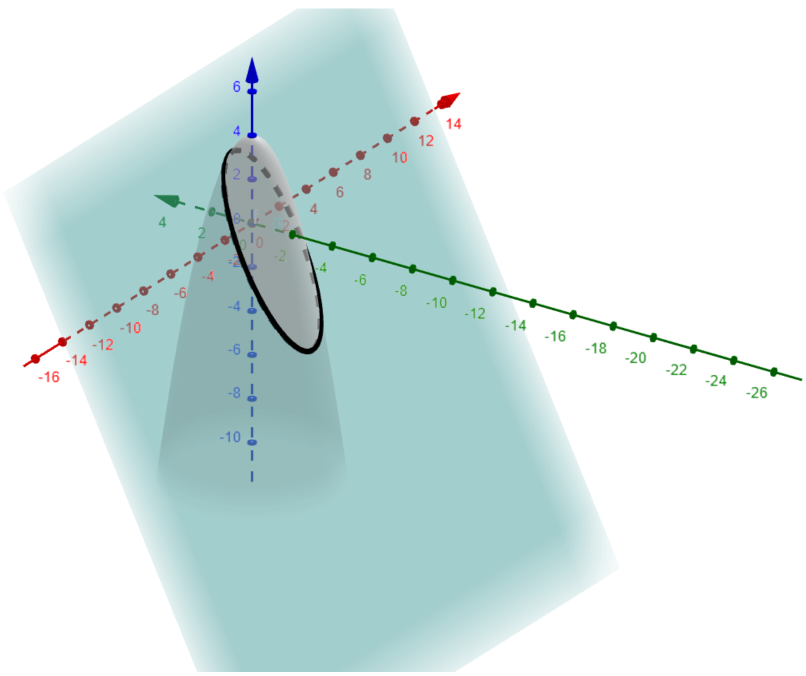
no plano, logo

$$\begin{aligned} 2y+1 =& 4-x^2-y^2 \\ (y+1)^2+x^2 =& 4. \end{aligned}$$

Assim uma parametrização natural para esta superfície é

$$\begin{aligned} X(\theta,\rho) =& (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta-1, 4-\rho^2\cos^2\theta-(\rho\sin\theta-1)^2), \\ =& (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta-1, 3-\rho^2+2\rho\sin\theta), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 2 \end{aligned}$$

Considere o gráfico



Mas lembre que devemos ter que uma parametrização com orientação tal que seu normal satisfaz $0\leqslant\vec{n}\cdot\vec{k}$. Para que nossa parametrização satisfaz esta condição devemos inverter a orientação do parâmetro θ (Verifique!). Logo uma parametrização com a orientação certa da superfície é dada por

$$X(\theta,\rho) = (\rho\cos(-\theta), \rho\sin(-\theta)-1, 3-\rho^2+2\rho\sin(-\theta)), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 2.$$

Para o calculo da integral precisamos calcular também

$$
\begin{aligned}
dy \wedge dz =& \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\rho)} d\theta d\rho = \begin{vmatrix} -\rho\cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -2\rho\cos(-\theta) & -2\rho + 2\sin(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\
=& 2\rho^2 \cos\theta d\theta d\rho \\
dz \wedge dx =& \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\rho)} d\theta d\rho = \begin{vmatrix} -2\rho\cos(-\theta) & -2\rho + 2\sin(-\theta) \\ \rho\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\
=& (-2\rho - 2\rho^2 \sin(\theta)) d\theta d\rho \\
dx \wedge dy =& \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\rho)} = \begin{vmatrix} \rho\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \\ -\rho\cos(-\theta) & \sin(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\
=& \rho d\theta d\rho
\end{aligned}
$$

Note que $dx \wedge dy$ diz que a parametrização tem a orientação pedida. Agora

$$
\begin{aligned}
&\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\cos\theta(2\rho^2\cos\theta) d\rho d\theta + (-\rho\sin\theta - 1)(-2\rho - 2\rho^2\sin\theta) d\rho d\theta \\
&+ (3 - \rho^2 - 2\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\rho^3(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 4\rho^2\sin\theta + 5\rho - \rho^3 - 2\rho^2\sin\theta d\rho d\theta \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3 d\rho d\theta + \left(\frac{4\rho^3}{3}\Big|_0^2 \right)\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \right) + 2\pi 5 \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2 \\
&- \left(\frac{2\rho^3}{3}\Big|_0^2 \right)\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \right) \\
=& 2\pi 2^2 + 0 + 20\pi + 0 \\
=& 28\pi.
\end{aligned}
$$

□

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha terceira componente não negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S, mostre que

$$
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy.
$$

Demonstração. Como a superfície é o gráfico da una função temos uma parametrização predileta dada por

$$X(x,y) = (x,y,f(x,y)), \quad (x,y) \in D$$

o vetor normal esta dada também

$$\begin{aligned}
\vec{N} =& \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \\
=& \vec{i}(-\frac{\partial f}{\partial x}) - \vec{j}(\frac{\partial f}{\partial y}) + \vec{k}1, \\
\vec{F} \cdot \vec{N} =& - P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R
\end{aligned}$$

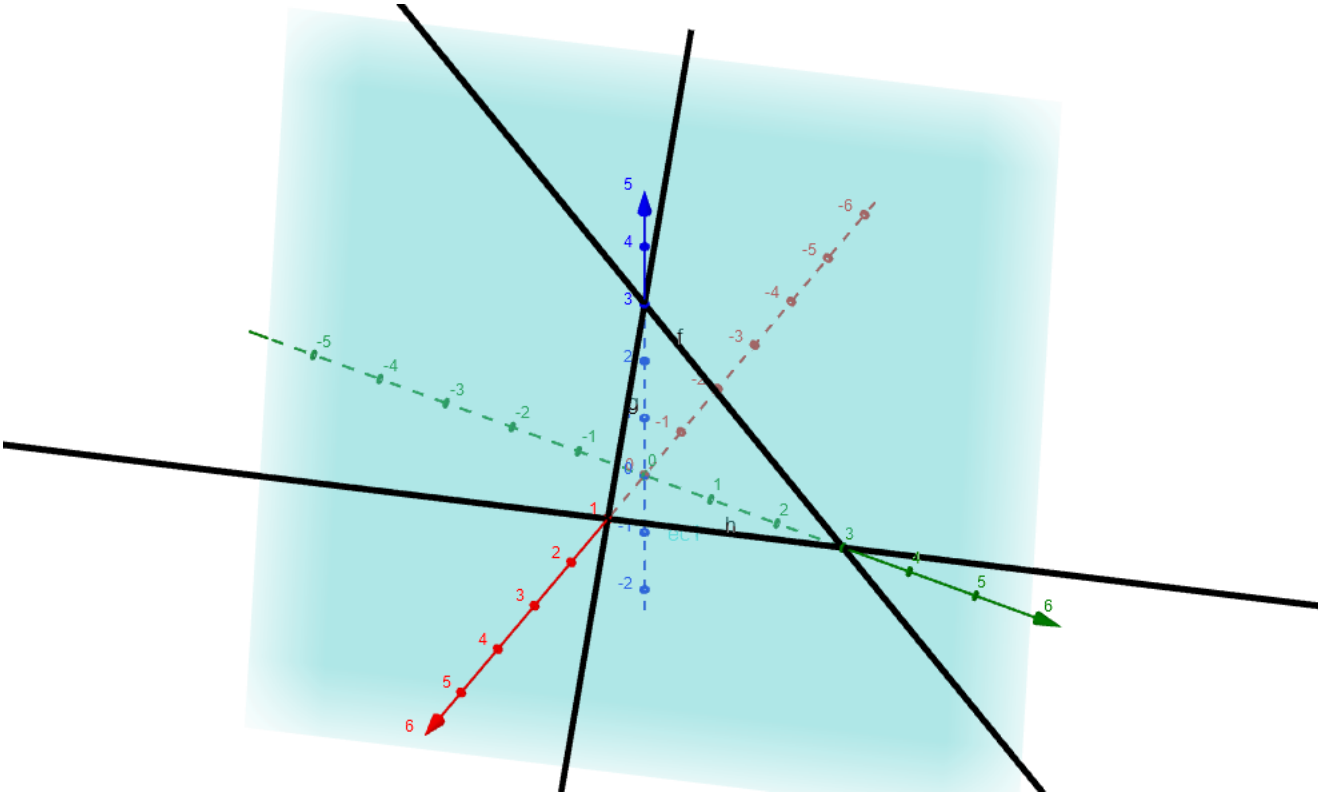
Logo integral fica como

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R) dx dy.$$

□

9. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:
(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a parte do plano $3x+y+z=3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Vamos considerar uma gráfica para o plano com seus respetivos intersectos com os planos xy, yz e zx.



Por o Teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

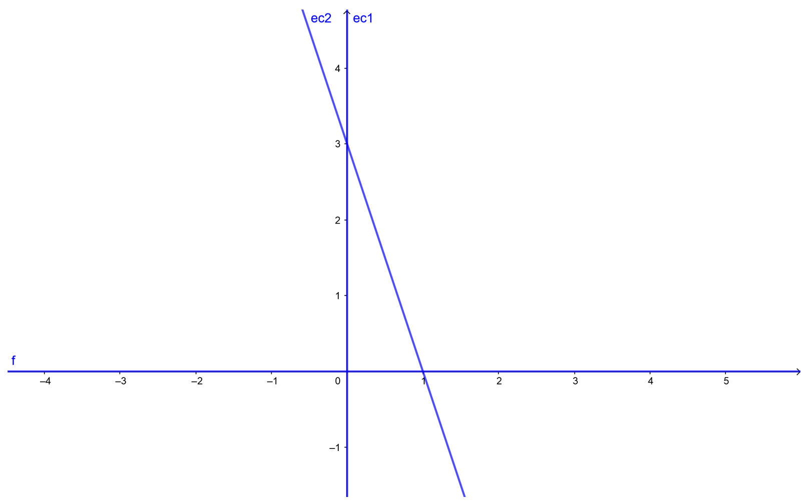
Assim vamos calcular o rotacional de F.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(3x) - \vec{j}(3y - x) + \vec{k}(2y).$$

Por outro lado o vetor normal do triângulo formado pelo plano no primeiro octante. Para esto tomamos a parametrização do triangulo dado por

$$X(x, y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

Onde (x, y) varia na projeção do triângulo no plano xy, esta determinado pelos eixos x e y e linha reta $3x + y = 3$, como na próxima figura



Por tanto $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 3-3x$. Agora

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} =& \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ =& \vec{i}3 + \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

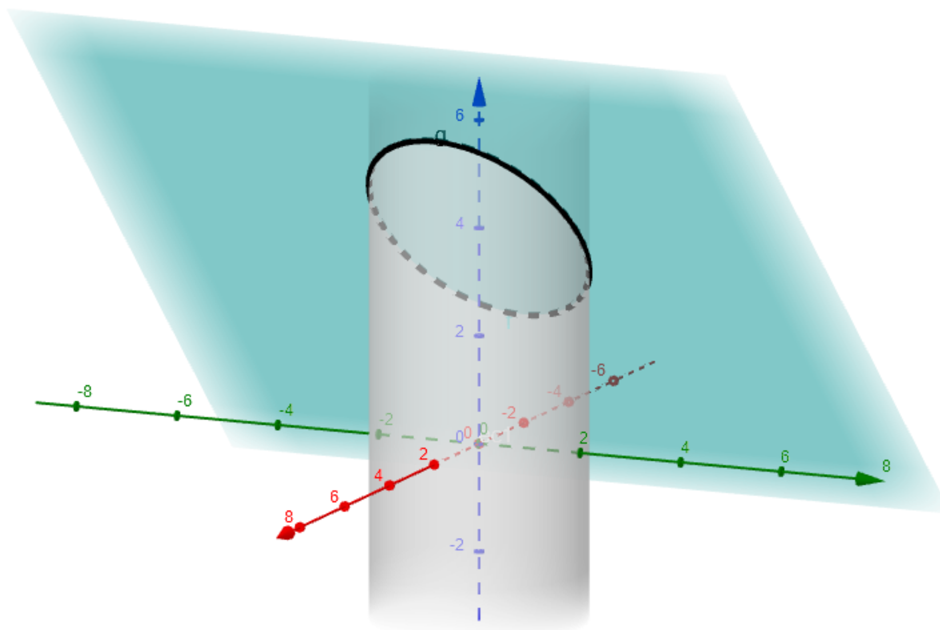
e por tanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} =& \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (3x\vec{i} - (3y - x)\vec{j} + 2y\vec{k}) dx dy \\ =& \int_0^1 \int_0^{3-3x} 10x - y \, dy \, dx \\ =& \int_0^1 10x(3-3x) - \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{3-3x} dx \\ =& \int_0^1 30x - 30x^2 - \frac{(3-3x)^2}{2} dx \\ =& 30 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - 30 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \frac{1}{12} \left.(3-3x)^3\right|_0^1 \\ =& \frac{30}{2} - \frac{30}{3} - \frac{3}{2} \\ =& \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z + \sin e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin\sin z^2)\vec{k}$ e γ é a interseção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Consideremos o seguinte gráfico para a superfície em questão



$\square$

Vamos calcular a integral de linha usando o Teorema de Stokes, por tanto vamos precisar calcular o rotacional do campo $\vec{F}$ e determinar o vetor normal à superfície

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z + \sin e^{x^3} & y & (5y + \sin\sin z^2) \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} - \vec{j}2 + \vec{k}4 \end{aligned}$$

é fácil ver que o vetor normal ao plano $z = x + 4$ é

$$\vec{n}(x, y, z) = -1\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$$

Logo

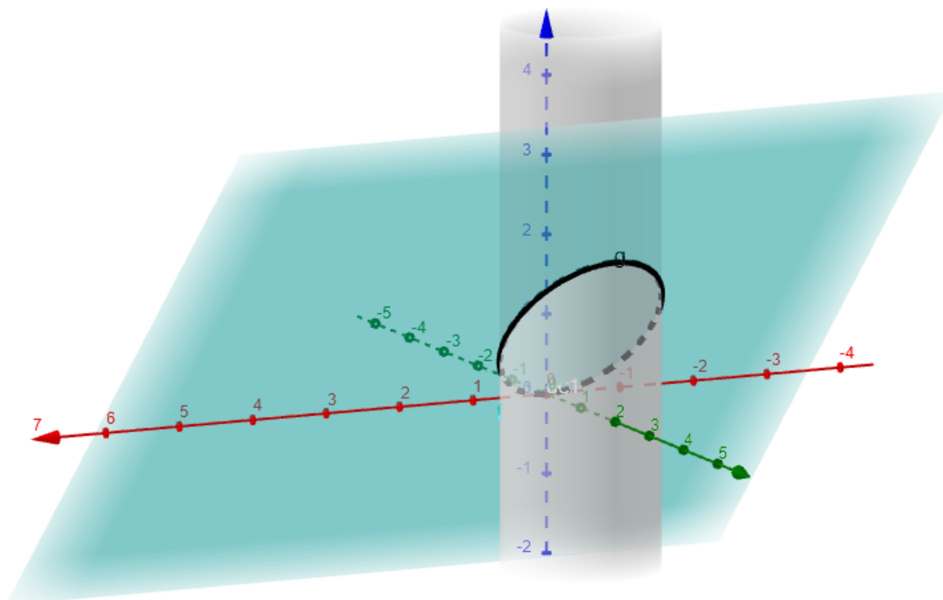
$$\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} = -1$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} =& \int_0^{2\pi} \int_0^2 -1\rho d\rho d\theta \\ =& -2\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2 \\ =& -4\pi.\end{aligned}$$

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)^2 0)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Vamos considera um gráfico para a superfície



de novo para o calculo desta integral de linha vamos usar o Teorema de Stokes, assim precisamos calcular o rotacional do campo e o vetor normal à superfície. Facilmente por calculo direito vamos ver que

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{\imath} + \vec{k}$$

e dado que a superfície faz parte do plano $z = y$ temos que $\vec{N} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} = -\vec{\jmath} + \vec{k}$. Logo

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N} = 1$$

e por tanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = & \int_0^{2\pi} \int_0^1 1\rho d\rho d\theta \\ = & 2\frac{\pi}{2} \\ = & \pi.\end{aligned}$$

$\square$