Gabarito
MAT2219 — Lista 4

1. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no senitdo horario. Dê todos os valores possiveis para

$$(a) \int_\gamma \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}. \quad (b) \int_\gamma \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}.$$

Demonstração. Dica: considere as curvas que enlaçam $(0,0)$ e não enlaçam $(0,0)$ e observe que $\frac{\partial Q}{\partial_x} - \frac{\partial P}{\partial_y} = 0$ fora do ponto $(0,0)$ (neste ponto o campo não está definido). Falta apenas aplicar teorema de Green. □

3. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

- (a)$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + x\vec{j}, \quad D = \mathbb{R}^2$. Note que o campo no é conservativo pois

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 0.$$

- (b) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}. \quad D = \mathbb{R}^2$ Note que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2xe^y + y)}{\partial x} = 2xe^y + 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2e^y + x - 2y)}{\partial y} = 2xe^y + 1,$$

  Logo como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo então temos que $\vec{F}$ é conservativo. Agora vamos supor conhecida a função potencial e vamos caraterizar esta. Seja φ a função potencial, logo

$$\nabla\varphi = \vec{F},$$

  isso é mesmo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xe^y + y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y$$

da primeira equação temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} =& 2xe^y + y,\\
\varphi(x,y) =& \int_0^x (2te^y + y)dt + f(y)\\
=& (2\frac{t^2}{2}e^y + yt)\Big|_0^x + f(y)\\
=& x^2e^y + yx + f(y)
\end{aligned}$$

assim $\varphi(x,y) = x^2e^y + yx + f(y)$ para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial(x^2e^y + yx + f(y))}{\partial y} = x^2e^y + x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por outro lado da segunda equação temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y$$

Por tanto

$$x^2e^y + x - 2y = x^2e^y + x + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

assim $f(y) = -y^2 + c$, com c uma constante. Em conclução temos que função potencial é

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + yx - y^2 + c.$$

4. Calcule

(b). $\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + (2y\ln(x^2+1))\,dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ percorrido no sentido anti-horario.

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema de Green

$$P(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+1} \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4xy}{x^2+1}$$
$$Q(x,y) = 2y\ln(x^2+1) \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4xy}{x^2+1}$$

Dái, note que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Portanto,

$$\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + \big(2y\ln(x^2+1)\big)\, dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0$$

□

(d). $\int_\gamma (2xy + \sin y)\, dx + x\cos y\, dy + x^2 dz$, onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = x$ no 1° octante e orientada de forma que a sua projecao no plano yz seja percorrida no sentido horario.

Demonstração. Como $y = x$ substituímos em $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e temos $4y^2 + z^2 = 1$. Agora vamos usar coordenadas polares,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\cos\theta \longrightarrow dy = -\frac{1}{2}\sin\theta \\ z &= \sin\theta \longrightarrow dz = \\ &\cos\theta \\ x &= \frac{1}{2}\cos\theta \longrightarrow dx = -\frac{1}{2}\sin\theta \end{aligned} \tag{1}$$

Onde $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$. Assim, $\int_\gamma (2xy + \sin y)\, dx + x\cos y\, dy = (*)$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)\right) \left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{4}\cos^2\theta\cos\theta \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-\frac{1}{4}\sin\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{4}\cos^3\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\int -\frac{1}{4}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{12}\cos^3\theta + C$$
$$\int -\frac{1}{2}\sin\theta\sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)\,d\theta = -\cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + C$$
$$\int -\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)\,d\theta = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + C$$
$$\int \frac{1}{4}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right) + C$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{12}\cos^3\theta - \cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \\
&= \frac{1}{12}\cos^3\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{4}\sin\theta - \frac{1}{12}\sin^3\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

□

5. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.

Demonstração. Com $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$ temos $\gamma'(t) = (e^t, \cos t)$, logo

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \frac{e^t\vec{i} + \sin t\vec{j}}{e^{2t} + \sin^2 t} \longrightarrow \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{e^{2t} + \sin t\cos t}{e^{2t} + \sin^2 t}$$

Então,

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \int_0^\pi \frac{e^{2t} + \sin t\cos t}{e^{2t} + \sin^2 t}dt$$

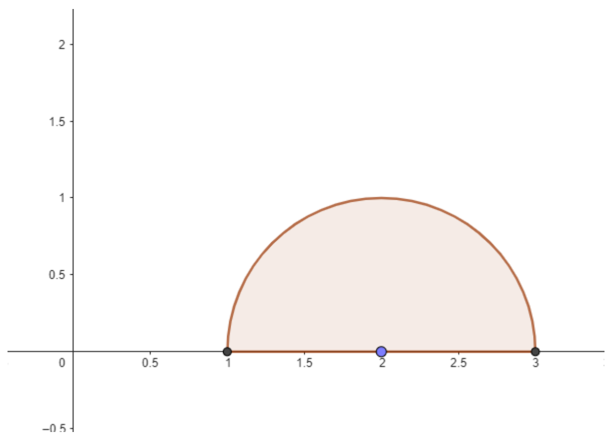
Substituindo $u = e^{2t} + \sin^2 t$ temos $du = 2e^{2t} + 2\sin t\cos t$. Além disso, se $t = 0$ temos $u = 1$ e se $t = \pi$ temos $u = e^{2\pi}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} &= \int_0^\pi \frac{e^{2t} + \sin t\cos t}{e^{2t} + \sin^2 t}dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^{2\pi}} \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^{e^{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{2\pi}\right) - \ln(1)\right) \\ &= \pi\end{aligned}$$

Observação: Observe que o campo vetorial é conservativo, então a conta da integral pode ser simplificada usando Teorema Fundamental para o campo conservativo (com função potencial $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$). □

6. Calcule as integrais

(b). $\int_\gamma (\ln(x+y^2)-y)dx+(2y\ln(x+y^2)-x)dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2+y^2 = 1$ com $y \geqslant 0$ orientada no sentido horário.



Demonstração.

Observe que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Seja γ_1 o segmento parametrizado por $x(t) = t$ e $y(t) = 0$, $t \in [1,3]$, e D a região limitada por γ e γ_1, então por Teorema de Green,

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\gamma_1} (\ln(x+y^2)-y)dx + (2y\ln(x+y^2)-x)dy$$
$$-\int_\gamma (\ln(x+y^2)-y)dx + (2y\ln(x+y^2)-x)dy.$$

Portanto

$$\int_{\gamma} (\ln(x+y^2)-y)dx + (2y\ln(x+y^2)-x)dy$$

$$= \int_{\gamma_1} (\ln(x+y^2)-y)dx + (2y\ln(x+y^2)-x)dy = \int_1^3 \ln t dt = t\ln t|_1^3 - \int_1^3 dt = 3\ln 3 - 2.$$

□

7. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

- (a)$\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy dx + (x^2-y^2)dy$,
- (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y dx + x\cos y dy$

Demonstração. Dica: Dado que ambas funções são definidas em todo $\mathbb{R}^2$ e este é simplemente conexo, para provar que as integrais são independe do caminho é suficiente mostrar que sobre qualquer curva fechada simples C^1 a integral é nula. Para provar esto podemos usar o Teorema de Green

$$\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Para $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j}$ temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x,$$

Logo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

Para $\vec{F}(x,y) = \sin y\vec{i} + x\cos y\vec{j}$ temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x\cos y)}{\partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sin y}{\partial y} = \cos y$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = \cos y - \cos y = 0$$

assim

$$\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_K 0 dxdy = 0$$

Por tanto $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ e $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y\,dx + x\cos y\,dy$ independe do caminho. Agora para calcular a integral é suficientes tomar qualquer curva em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $(1,1)$ e (a,b), por exemplo uma linha reta

$$\gamma(t) = (1,1) + t(a,b), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$\square$