

Gabarito MAT2219 — Lista 3

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(b) $\int_{\gamma} xy^4 ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $0 \leq x$.

Demonstração. Vamos considerar a seguinte parametrização para a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $0 \leq x$,

$$\gamma(t) = (4 \cos(t), 4 \sin(t)), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo aplicando a formula

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Assim por um lado temos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-4 \sin(t))^2 + (4 \cos(t))^2} = \sqrt{16} = 4,$$

por tanto

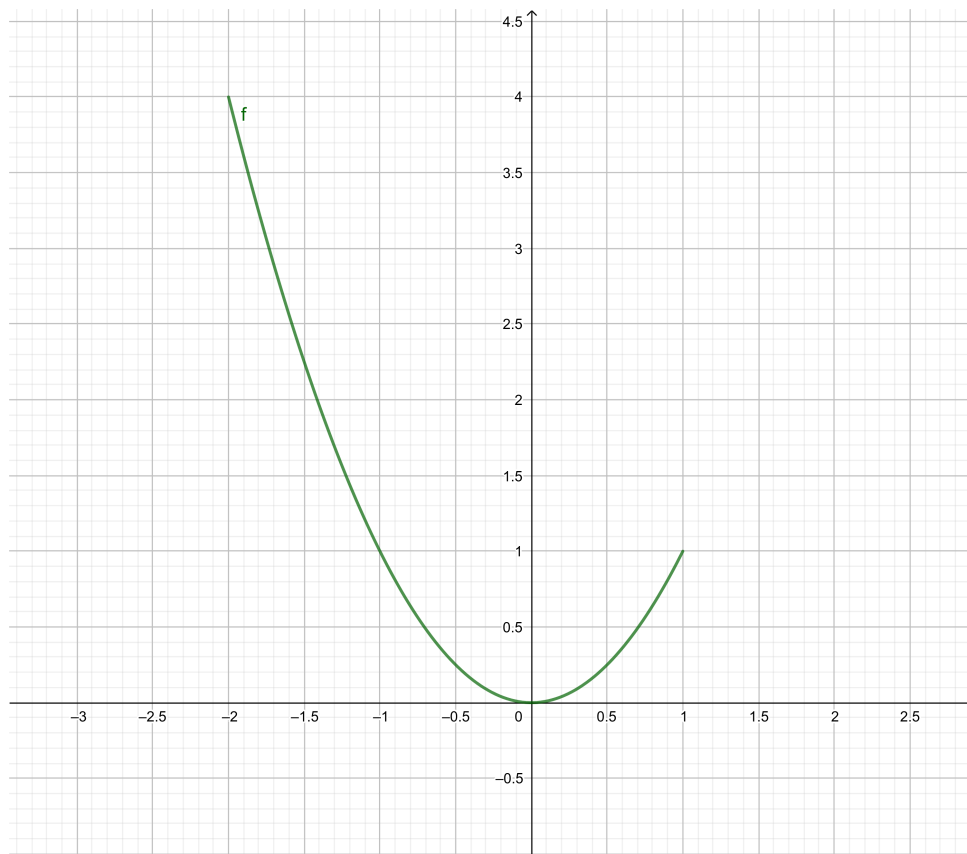
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(t) \cdot (4 \sin(t))^4 \cdot 4 dt \\ &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) (\sin(t))^4 dt \\ &= 4^6 \frac{\sin t^5}{5} \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4^6}{5} (1 + 1) \\ &= 1638,4 \end{aligned}$$

□

(c) $\int_{\gamma} (x - 2y^2) dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$.

Demonstração. Vamos considerar a parametrização do arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$ dada por:

$$\gamma(t) = (t, t^2), -2 \leq t \leq 1,$$



Agora usando a expressão para integral de linha de um campo vetorial $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ sobre uma curva parametrizada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_{\gamma} F(x, y) \cdot d\gamma = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (x - 3y^2) dy &= \int_{-2}^1 (t - 2t^4) \cdot 2t dt \\ &= 2 \int_{-2}^1 t^2 dt - 4 \int_{-2}^1 t^5 dt \\ &= 2 \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-2}^1 - 4 \left. \frac{t^6}{6} \right|_{-2}^1 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{2^7}{3} \\ &= 48.\end{aligned}$$

□

(e) $\int_{\gamma} xyz ds$, $\gamma : x = 2y$, $y = 3 \sin t$, $z = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Demonstração. O calculo direto da integral é usando a expressão do item anterior, para aplicar esta precisamos

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 + 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xyz ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \cdot 3 \sin t \cdot 3 \cos t \cdot \sqrt{13} dt, \\ &= 18\sqrt{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos t dt.\end{aligned}$$

Considerando a primitiva auxiliar

$$\int t \sin 2t dt = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t \cos 2t) + c$$

temos que

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8\sqrt{13}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \cos t dt \\
 &= \frac{18\sqrt{13}}{2} \frac{1}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
 &= 18\sqrt{13} \frac{\pi}{8} \\
 &= 9 \frac{\sqrt{13}}{4}.
 \end{aligned}$$

□

2. Calcule o comprimento das curvas

(a) $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$.

Demonstração. Para o cálculo do comprimento de uma curva parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, usamos a expressão

$$s = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Assim para $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ temos que

$$\begin{aligned}
 \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(a - a \cos(t))^2 + (a \sin(t))^2} \\
 &= \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos(t)} \\
 &= \sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos(t)}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos(t)} dt$$

usando a primitiva auxiliar para a função $f(t) = \sqrt{1 - \cos t}$ para $0 \leq t < \pi$ e $\pi < t \leq 2\pi$.

$$\int \sqrt{1 - \cos t} dt = -2\sqrt{1 - \cos t} \cot \frac{t}{2} + c$$

Note que em no ponto $t = \pi$ a “primitiva” não tem boa definição. Por tanto

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}dt \\ &= \sqrt{2}a \left(-2\sqrt{1-\cos t} \cot \frac{t}{2} \Big|_{t=0}^{t=\pi} + -2\sqrt{1-\cos t} \cot \frac{t}{2} \Big|_{t=\pi}^{t=2\pi} \right) \\ &= \sqrt{2}a(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \\ &= 8a. \end{aligned}$$

□

3. Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$.

Demonstração. Para calcular a massa do arame vamos usar a formula

$$M = \int_{\gamma} \delta(x, y, z) ds = \int_a^b \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Assim por um lado temos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 8t^2},$$

e por outro que

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 2t \cdot \sqrt{4 + 8t^2} dt \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{(4 + 8t^2)^3} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{12} (\sqrt{12^3} - 2^3) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

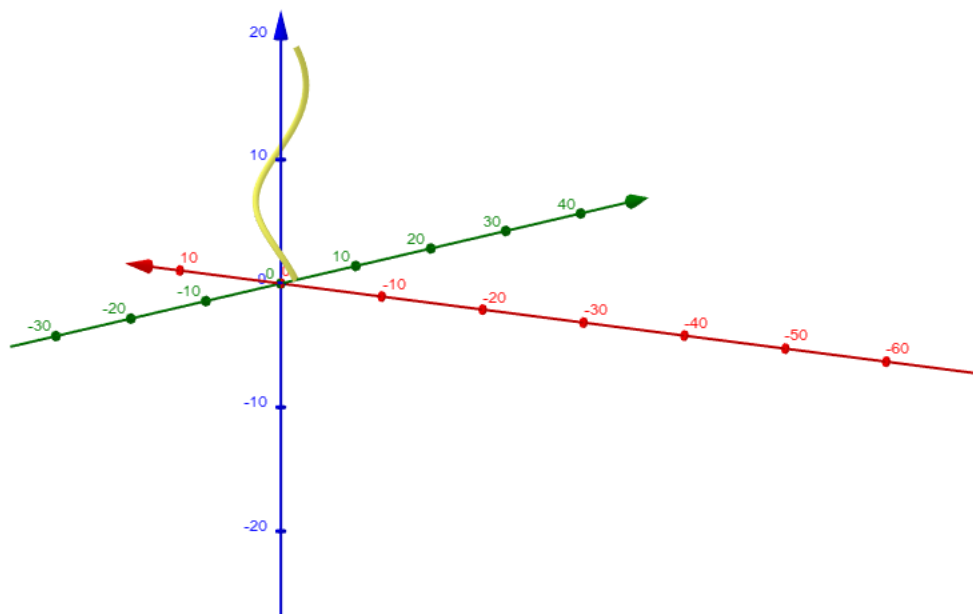
Observe que temos usado a primitiva auxiliar

$$\int 16t \cdot \sqrt{4 + 8t^2} dt = \frac{2}{3} \sqrt{(4 + 8t^2)^3} + c.$$

□

3. (c) Determine a massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade é uma constante k .

Demonstração. Considere o gráfico do fio em amarelo



Para calcular a massa precisamos de

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 9} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Logo

$$M = \int_{\gamma} \delta(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} k \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi k \sqrt{13}.$$

□

4. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e a curva

(b) γ é composto dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois $(1, 1, 1)$.

Demonstração. Note que o primeiro tramo da curva pode ser parametrizado por

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

e o segundo poder ser parametriza pela expressão vetorial de uma reta que une dois pontos, i.e.,

$$\gamma_2(t) = (1, 0, 0) + t((1, 1, 1) - (1, 0, 0)) = (1, 1, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Logo a integral é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 2t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

5. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

(b) $\vec{F}(x, y) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

Demonstração. Lembremos que a expressão para integral de linha de um campo vetorial $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ sobre uma curva parametrizada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ é

$$\int_{\gamma} F(x, y) \cdot d\gamma = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

Além disso a parametrização natural da elipse é

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t,$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^{2\pi} 2\pi(2(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t)) + ((a \cos t b \sin t) b \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2a^2 - b^2) \cos t \sin t dt + \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt \\ &= (-2a^2 - b^2) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} + ab \frac{1}{2} (3 \sin t \cos t - t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0 + -\pi ab \\ &= -\pi ab. \end{aligned}$$

Observe que temos usado a primitiva auxiliar

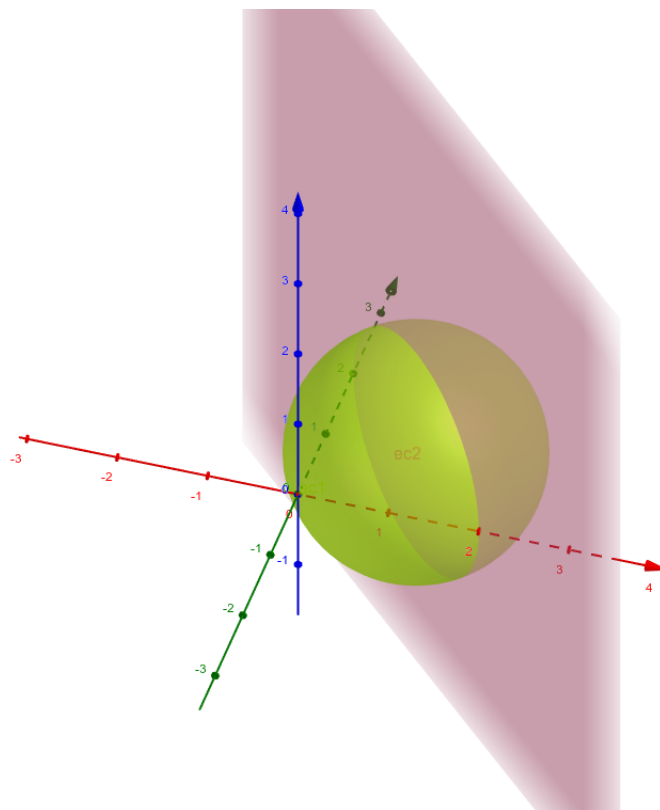
$$\int \cos^2 t - 2 \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (3 \sin t \cos t - t) + c.$$

□

6. Calcule

(c) $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$, sendo γ a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário.

Demonstração. Considere o gráfico



Agora achemos a interseção: dado que $x + y = 2$ temos que $y = 2 - x$, logo

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 2(x + y) \\x^2 + (2 - x)^2 + z^2 &= 2 \cdot 2 \\(x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} &= 1,\end{aligned}$$

assim a interseção é

$$y = 2 - x, \quad (x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Note que uma parametrização para a projeção no plano Oxz com orientação horária é (observe que no plano Oxz o sentido do eixo x é "negativo")

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad z(t) = \sqrt{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

por tanto

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 - (1 + \cos t), \sqrt{2} \sin t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2} \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e a integral fica

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y dx + z dy + x dz &= \int_0^{2\pi} -(1 - \cos t) \sin t dt + \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin t \sin t dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) \sqrt{2} \cos t dt \\ &= 2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

(d) $\int_{\gamma} x dx + (y + x) dy + z dz$, sendo γ a interseção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário.

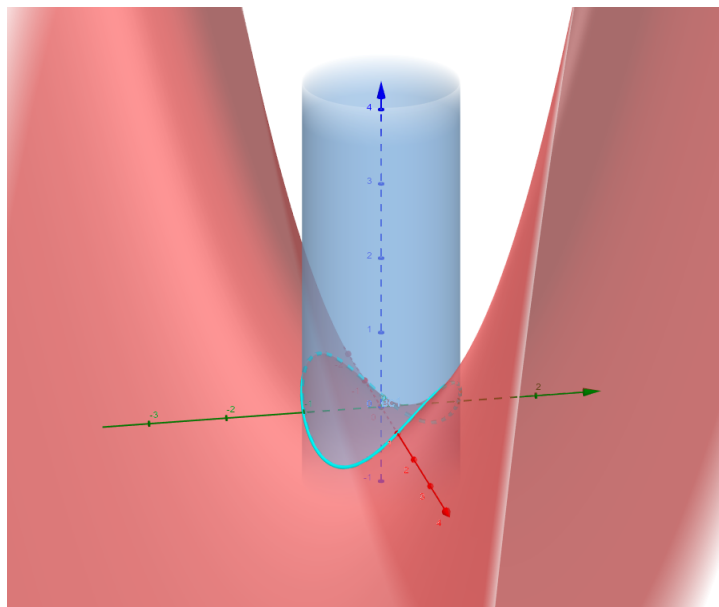
Demonstração. A para metrização no sentido horário para a projeção esta dada por

$$x(t) = \cos t, y(t) = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

por tanto a parametrização da interseção das superfícies é

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, -\cos t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

observe o gráfico seguinte



Logo a integral de linha fica como:

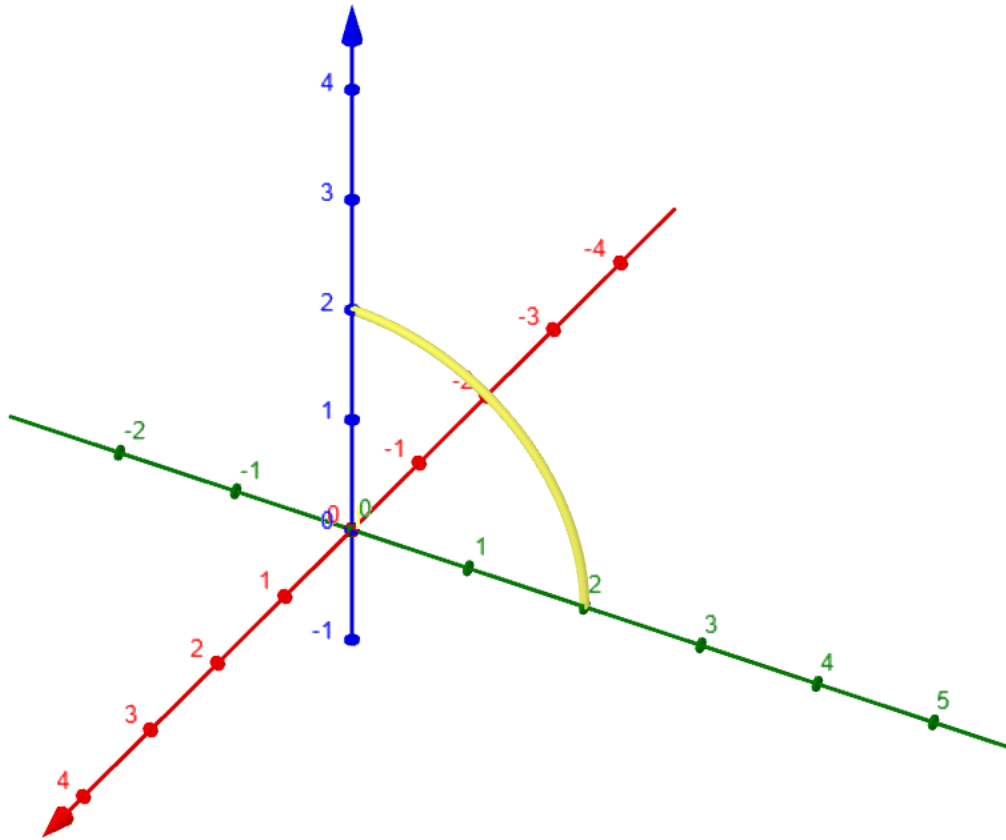
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} x dx + (y + x) dy + z dz &= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t dt \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t dt \\ &= -\pi + 0 + 0 \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

□

7. Calcule

(a) $\int_{\gamma} 2x dx + (z^2 - \frac{y^2}{2}) dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 2)$.

Demonstração. Condiremos o seguinte gráfico da curva pedida



esta curva pode ser parametrizada em sentido anti-horário em relação ao plano Oyz por

$$\gamma(t) = (0, \sqrt{4 - t^2}, t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

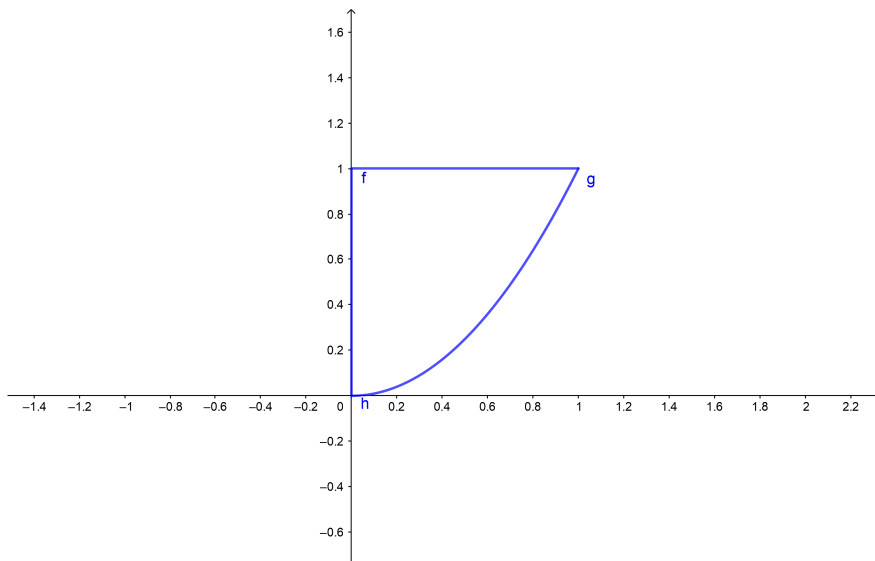
logo a integral fica como:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} 2x dx + (z^2 - \frac{y^2}{2}) dz &= \int_0^2 2 \cdot 0 dt + \int_0^2 (t^2 - \frac{(\sqrt{4-t^2})^2}{2}) dt \\ &= 0 + \int_0^2 (-2 + \frac{3t^2}{2}) dt \\ &= -2 \cdot 2 + \frac{t^3}{2} \Big|_{t=0}^{t=2} \\ &= -4 + 4 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

(c) $\int_{\gamma} \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário.

Demonstração. Vamos considerar primeiro o gráfico



A curva que parametriza a fronteira de nossa região é união das curvas h, f e g.

$$\begin{aligned}f(t) &= (t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ g(t) &= ((1-t), (1-t)^2), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ h(t) &= (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Assim a integral é

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy &= \int_h \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy + \int_f \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy + \int_g \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy \\
 &= \left(\int_0^1 \sqrt{t}d0 + \sqrt{0}dt \right) + \left(\int_0^1 \sqrt{1}dt + \sqrt{t}d1 \right) \\
 &\quad + \left(\int_0^1 \sqrt{(1-t)^2}dt + \int_0^1 \sqrt{1-t}d(1-t)^2 \right) \\
 &= 1 + (-1) + \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) + \int_0^1 2(1-t)^{\frac{3}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} + 2 \frac{(1-t)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \\
 &= -\frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

□

8. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da cicloide $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Demonstração. Lembremos que o trabalho calcula-se como a integral de linha:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t),$$

para $\gamma(t)$ definida em $a \leq t \leq b$. Assim para que calcular a integral de linha precisamos conhecer $\vec{F}(\gamma(t))$, $d\vec{\gamma}(t)$, $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t)$, por tanto

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(x, y) &= x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}, \\
 \vec{\gamma}(t) &= (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}, \\
 \vec{F}(\gamma(t)) &= (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t + 2)\vec{j}, \\
 d\vec{\gamma}(t) &= (1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}, \\
 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t) &= (t - \sin t)(1 - \cos t)dt + (3 + \cos t) \sin t dt.
 \end{aligned}$$

Logo nossa integral fica como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t) &= \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t) dt + (3 + \cos t) \sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t \cos t + 2 \sin t + 2 \sin t \cos t) dt. \end{aligned}$$

Considerando as primitivas auxiliares

$$\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t + c, \quad \int 2 \sin t \cos t dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + c.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) &= \int_0^{2\pi} (t - t \cos t + 2 \sin t + 2 \sin t \cos t) dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} - (t \sin t + \cos t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} + \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{4\pi^2}{2} + (1 - 1) + (-2 - (-2)) \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

□

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(b) $\oint_{\gamma} (x + 2y) dx + (x - 2y) dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$ orientada positivamente.

Demonstração. Lembremos que el Teorema de Green diz que: se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto, com interior não vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechado, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K . Nestas condições

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

□

Logo para aplicar este teorema precisamos conhecer

$$\begin{aligned}P(x, y) &= x + 2y, \\Q(x, y) &= x - 2y, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(x - 2y)}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(x + 2y)}{\partial y} = 2, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 1 - 2 = -1.\end{aligned}$$

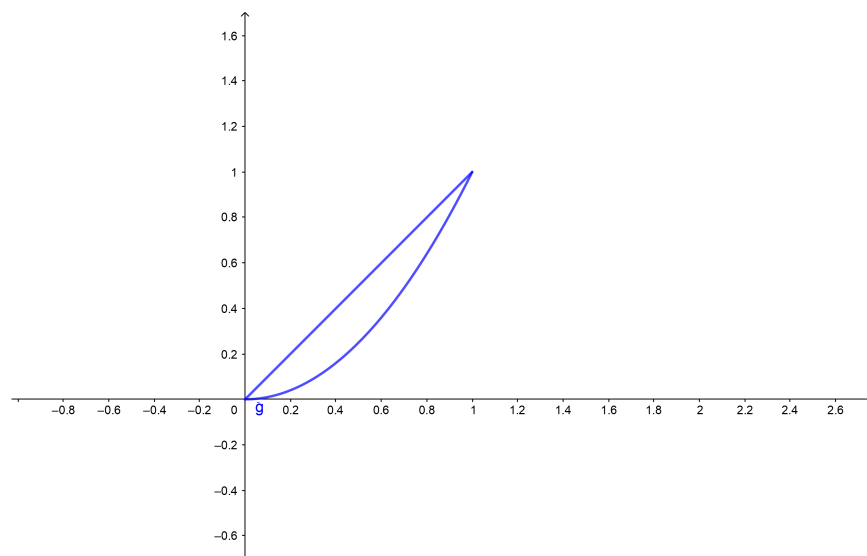
Assim temos que

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_K dx dy.$$

A região limitada pelo curva descrita é

$$K = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Considere o grafico gráfico



por tanto

$$\begin{aligned}\iint_K dx dy &= - \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = - \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= - \left. \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} \\ &= - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(g) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ onde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.

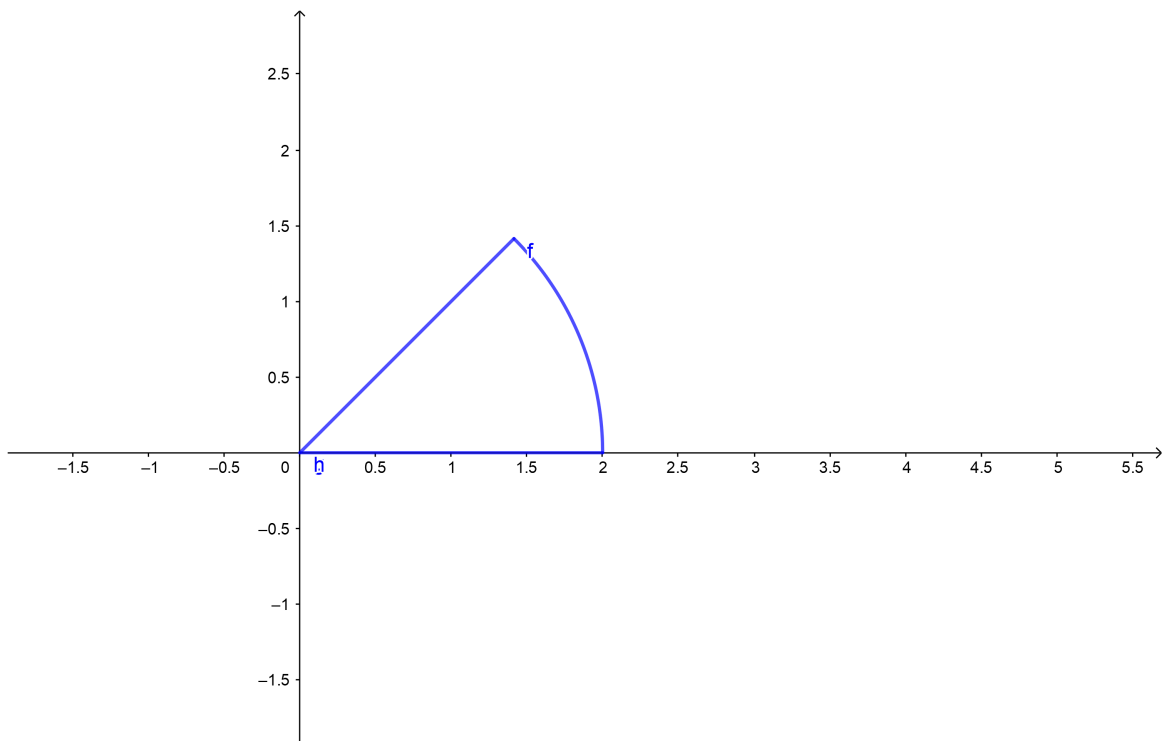
Demonstração. Para aplicar o Teorema de Green precisamos conhecer

$$\begin{aligned}P(x, y) &= y^2 - x^2y \\ Q(x, y) &= xy^2, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(y^2 - x^2y)}{\partial y} = 2y - x^2, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= y^2 - 2y + x^2,\end{aligned}$$

Logo

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_K y^2 - 2y + x^2 dx dy$$

Além da região com fronteira γ , para isto consideremos o gráfico



Para calcular a integral dupla vamos usar coordenadas polares

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin \theta$$

notemos que a região

$$R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

é mapeada para a região K, assim aplicando o teorema de mudança de variáveis

temos que

$$\begin{aligned}\iint_K y^2 - 2y + x^2 dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 (r^2 - 2r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^2 - 2 \frac{r^3}{3} \Big|_0^2 \sin \theta \right) d\theta \\ &= 2^2 \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{16}{3} \sin \theta d\theta \\ &= \pi + \frac{16}{3} \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right).\end{aligned}$$

□

11. Calcule

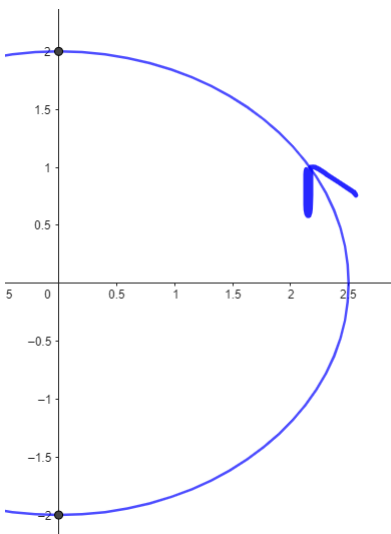
(a) $\int_{\gamma} x^2(5y dx + 7x dy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0, -2)$ a $(0, 2)$ com $x \geq 0$.

Demonstração. Para calcular a integral vamos usar coordenadas polares

$$4x = 10 \cos \theta \rightarrow x = \frac{5}{2} \cos \theta \rightarrow dx = -\frac{5}{2} \sin \theta$$

$$5y = 10 \sin \theta \rightarrow y = 2 \sin \theta \rightarrow dy = 2 \cos \theta.$$

Agora, considerando o grafico,



temos que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Então,

$$\int_{\gamma} x^2(5y dx + 7x dy) + e^y dy = \int_{\gamma} 5x^2 y dx + 7x^3 dy + e^y dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{5}{2} \cos \theta \right)^2 (2 \sin \theta) \left(-\frac{5}{2} \sin \theta \right) + 7 \left(\frac{5}{2} \cos \theta \right)^3 (2 \cos \theta) + 2e^{2 \sin \theta} \cos \theta \right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{5^3}{4} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 7 \left(\frac{5^3}{4} \right) \cos^4 \theta + 2e^{2 \sin \theta} \cos \theta \right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{5^3}{4} \cos^2 \theta + \frac{5^3}{4} \sin^2 \theta + 7 \left(\frac{5^3}{4} \right) \cos^4 \theta + 2e^{2 \sin \theta} \cos \theta \right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{5^3}{4} \cos^2 \theta + 2(5^3) \cos^4 \theta + 2e^{2 \sin \theta} \cos \theta \right] d\theta \\
&= -\frac{5^3}{4} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) + 2(5^3) \left(\cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin(4\theta) \right) \right) + e^{2 \sin \theta} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{5^3}{4} \frac{\pi}{2} + 2(5^3) \frac{3\pi}{8} + e^2 + \frac{5^3}{4} \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 2(5^3) \left(-\frac{3\pi}{8} \right) - e^{-2} \\
&= e^2 - e^{-2} + \left(-\frac{5^3}{8} + 3\frac{5^3}{8} - \frac{5^3}{8} + 3\frac{5^3}{8} \right) \pi \\
&= e^2 - e^{-2} + \frac{5^3}{2} \pi
\end{aligned}$$

□