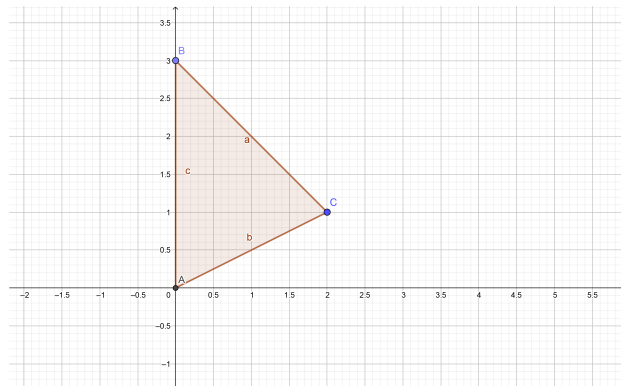


Gabarito

MAT2219 — Lista 2

1.(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\delta(x, y) = x + y$.

Demonstração. Considere a seguinte figura do triângulo com os vértices dados



Podemos descrever o triângulo como

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 3 - x \right\}$$

Lembre que a massa é a integral da função de densidade sobre o triângulo, assim

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x + y \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=3-x} dx \\ &= \int_0^2 x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} dx \\ &= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{(x-3)^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{24} \Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

□

1.(d) D é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y - x = 2$ e $\delta(x, y) = 3$.

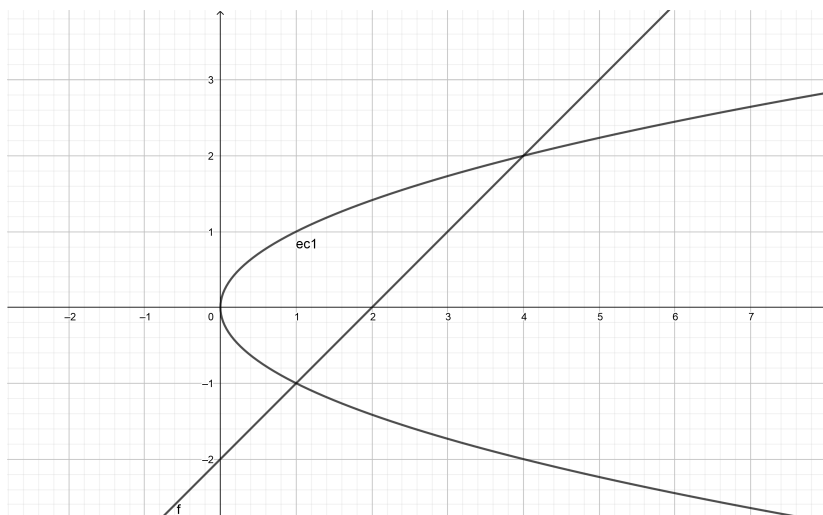
Demonstração. Para determinar a região de integração primeiro achamos os interseções entre a parábola $x_1(y) = y^2$ e a reta $x_2(y) = y + 2$, para isso note que

$$\begin{aligned} x_1(y) &= x_2(y) \\ y^2 &= y + 2 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Implica $y = 2, y = -1$. Logo a região de integração esta dada por

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}$$

Veja a figura em baixo



□

logo a massa esta dada por

$$\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} 3 dx dy = \frac{27}{2}$$

2.(a) Calcule a massa de $D = \{(x, y) \mid (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$ com função densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$.

Demonstração. A massa esta dada por

$$\iint_D x - 2y + 18 dx dy$$

Para calcular esta integral consideremos a seguinte mudança de coordenadas

$$x - 2y + 3 = r \cos \theta, \quad 3x + 4y - 1 = r \sin \theta$$

resolvendo isso para x e y temos:

$$\begin{aligned} x(r, \theta) &= \frac{r}{5} \sin \theta + \frac{2}{5} r \cos \theta - 1, \\ y(r, \theta) &= \frac{r}{10} \sin \theta - \frac{3}{10} r \cos \theta + 1. \end{aligned}$$

A função de densidade em estas novas coordenadas é

$$\delta(x, y) = x - 2y + 18 = r \cos \theta + 15$$

além disso note que

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin \theta}{5} + \frac{2 \cos \theta}{5} & \frac{r}{5} \cos \theta - \frac{2r \sin \theta}{5} \\ \frac{\sin \theta}{10} - \frac{3 \cos \theta}{10} & \frac{r \cos \theta}{10} + \frac{3r \sin \theta}{10} \end{array} \right| = \frac{r}{10}$$

Logo temos que

$$\text{Massa} = \iint_D x - 2y + 18 dx dy = \iint_{D'} (r \cos \theta + 15) \frac{r}{10} dr d\theta$$

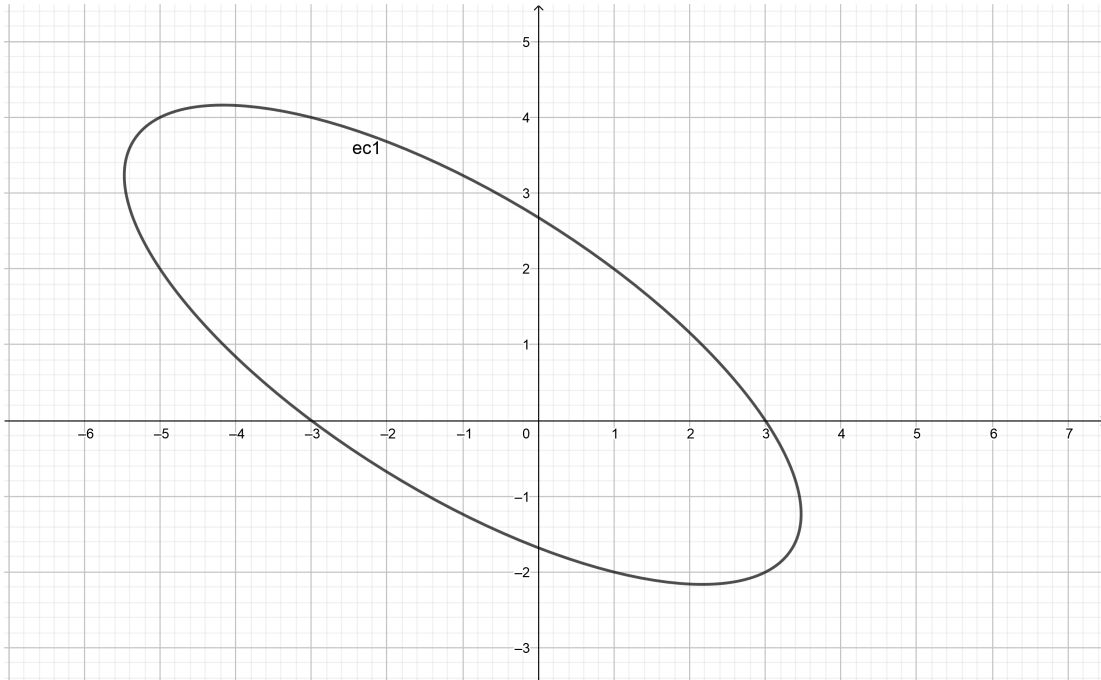
onde D' é a região limitada pela curva $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 100$, isso é

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{100} \right\}$$

assim

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{100}} (r \cos \theta + 15) \frac{r}{10} dr d\theta = 150\pi.$$

Observe que a mudança de coordenadas usada transforma um disco centrado no origem e de radio $\sqrt{100}$ na região de integração original na figura abaixo



□

3. (b) Calcule as integrais iteradas:

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y \, dx \, dz \, dy$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y \, dx \, dz \, dy &= \int_0^{\pi} \int_0^2 (zx \sin y) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{4-z^2}} \, dz \, dy \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^2 z \sqrt{4-z^2} \sin y \, dz \, dy \end{aligned}$$

Considerando a primitiva auxiliar

$$\int z \sqrt{4-z^2} \, dz = -\frac{1}{3} (4-z^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

temos que:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}} \sin y \Big|_{z=0}^{z=2} dy \\ &= \int_0^\pi \frac{8}{3} \sin y dy \\ &= -\frac{8}{3} \cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

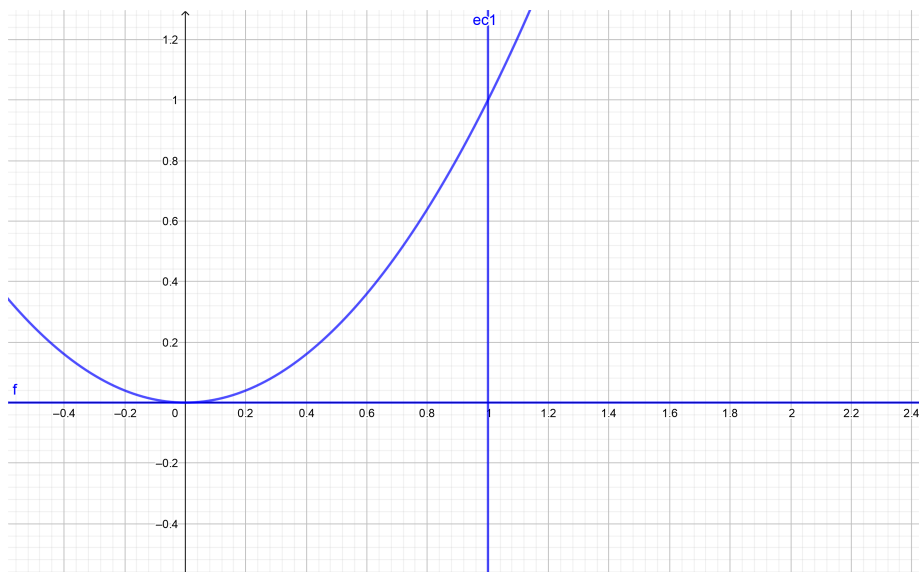
□

4.(b)

$$\iiint_D y dx dy dz$$

onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

Demonstração. Note que a região de integração é $0 \leq z \leq x + 2y$, $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Para maior compreensão dos limites de integração primeiro pense na região limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ no plano xy , considere o gráfico seguinte



Logo podemos deduzir que $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$. A variação de z esta limitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2y$, assim $0 \leq z \leq x + 2y$.

Portanto a integral é

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \frac{5}{28}.$$

□

6. (c) calcule as seguintes integrais: (c)

$$\iiint_E x^2 \, dz \, dy \, dx,$$

onde E é o solido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $0 \leq z$.

Demonstração. A variação em z esta limitada pelo plano $z = 0$ e a parte superior do cone $z = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$, a variação no plano xy esta limitada pela projeção do cilindro, isso é, por o circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Logo a integral é

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 \, dz \, dy \, dx &= \iint_{D(0,1)} \int_0^{\sqrt{4x^2+4y^2}} x^2 \, dz \, dy \, dx \\ &= \iint_{D(0,1)} x^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, note a região de integração muda por $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \sqrt{4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta} r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^4 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

□

7. Determine o volume da região R limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

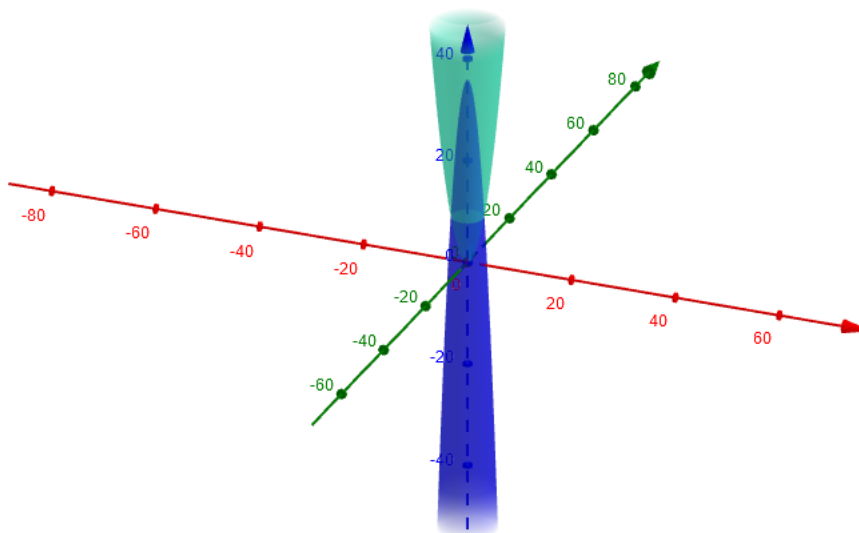
Demonstração. O volume da região pode ser calculado com a integral

$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^{36-3x^2-3y^2} dz dy dx$$

onde D é a projeção do sólido no plano xy . Esta projeção esta limitada pela interseção dos paraboloides, assim

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 36 - 3x^2 - 3y^2 \\4x^2 + 4y^2 &= 36 \\x^2 + y^2 &= 9 = 3^2\end{aligned}$$

Logo $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 3^2\}$. Considere a seguinte figura



Portanto

$$\begin{aligned}\text{Vol} &= \iint_D \int_{x^2+y^2}^{36-3x^2-3y^2} dz dy dx \\ &= \iint_D 36 - 4x^2 - 4y^2 dx dy\end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral usamos coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, onde a região de integração foi mudada por $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 3\}$, assim

$$\text{Vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (36 - 4r^2 \cos^2 \theta - 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = 162\pi.$$

□

9 (c). calcule as integrais .

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

onde E é a região interior ao cone $\phi = \frac{\pi}{6}$ e à esfera $\rho = 2$.

Demonstração. A região interior dentro o cone e a esfera em coordenadas esféricas

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

esta dada por

$$R = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

logo a integral fazendo a mudança de coordennadas é

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 8\pi - 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \\ &= 4\pi(2 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

□

10. Calcule o volume da região limitada pelo elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Demonstração. Para calcular o volume de esta região vamos considerar a seguinte mudança de coordenadas

$$x = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \phi$$

Note que a esfera de raio 1 é transformado pelo aplicação de mudança de coordenadas para o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Para isso veja que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{c^2 \rho^2 \cos^2 \phi}{c^2} \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &= \rho^2. \end{aligned}$$

Além disso, observe que o jacobiano associado é

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} a \sin \phi \cos \theta & a\rho \cos \phi \cos \theta & -a\rho \sin \phi \sin \theta \\ b \sin \phi \sin \theta & b\rho \cos \phi \sin \theta & b\rho \sin \phi \cos \theta \\ c \cos \phi & -c\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc\rho^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \iiint_E 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 abc\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

□

12. Calcule a massa do sólido $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, 0 < a \leq z\}$, com $a < b$ e $\delta(x, y, z) = z$.

Demonstração. Note que z varia entre o plano $z = a$ e o hemisfério superior da esfera com raio b , $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$, i.e.,

$$a \leq z \leq \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$$

Além disso a projeção do sólido ao plano xy é a região limitada pela curva interseção entre o plano $z = a$ o hemisfério superior da esfera de radio b , isso é

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 &= b^2 - a^2 \end{aligned}$$

Portanto a projeção no plano xy é

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = b^2 - a^2\}$$

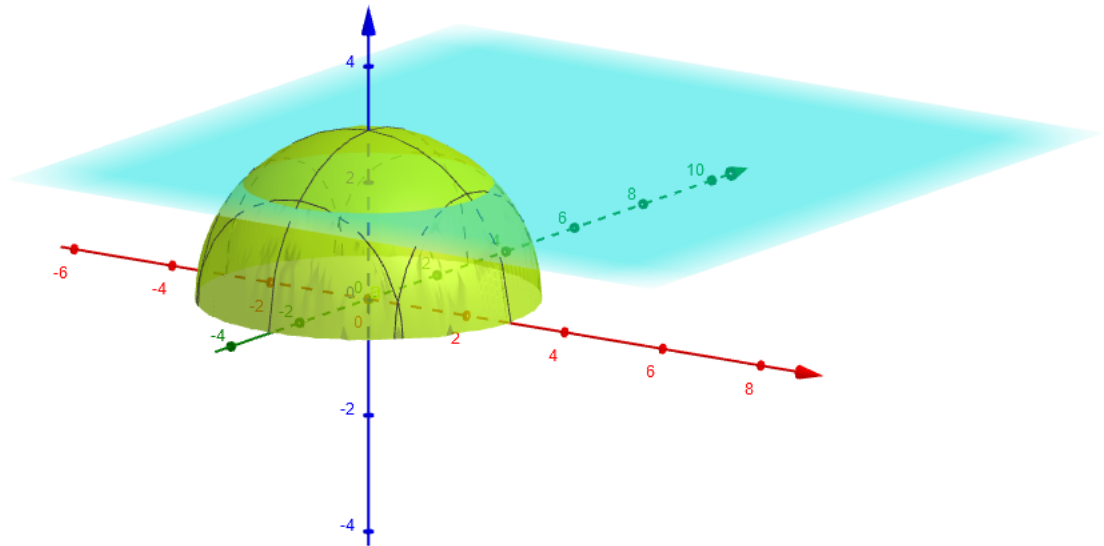
Logo

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \iint_D \int_a^{\sqrt{b^2 - x^2 - y^2}} z \, dz \\ &= \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_a^{\sqrt{b^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \iint_D \frac{b^2 - x^2 - y^2}{2} - \frac{a^2}{2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares, assim para $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ temos que

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{b^2 - a^2}} \left(\frac{b^2 - r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} (b^2 - a^2)^2 \pi. \end{aligned}$$

Considere a seguinte figura para $a = 3$ e $b = 3$.



□

14. Calcule a massa da região R limitada por: (a) $z(x^2 + y^2) = 2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, com $0 \leq x$ e $y \leq 0$ e $\delta(x, y, z) = 1$.

Demonstração. Temos que z varia entre o plano $z = 0$ e $z = \frac{2}{x^2 + y^2}$, além que $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq x, y \leq 0\}$, assim

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \iint_D \int_0^{\frac{2}{x^2 + y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \iint_D \frac{2}{x^2 + y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ a região muda para

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

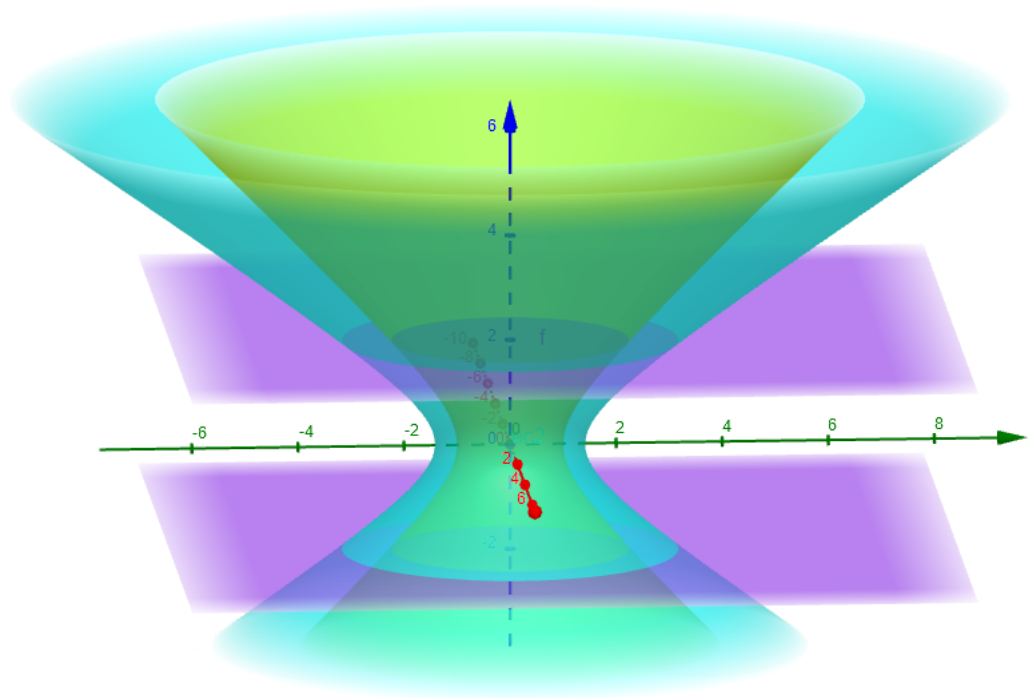
portanto

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2 \ln r \Big|_{r=1}^{r=\sqrt{2}} d\theta \\ &= \pi \ln \sqrt{2} \\ &= \frac{\pi \ln 2}{2} \end{aligned}$$

□

(f). $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, $x^2 + y^2 = 2 + 2z^2$, $|z| \leq a$, $\delta(x, y, z) = z^2$

Demonstração. Veja a seguinte figura para com $a = 2$



Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$x = r\phi \cos \theta, \quad y = r\phi \sin \theta, \quad z = \sqrt{r^2 - 1}$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < \phi, 1 < r$

Note que

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \phi \cos \theta & -r\phi \sin \theta & r \cos \theta \\ \phi \sin \theta & r\phi \cos \theta & r \sin \theta \\ \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\phi r^3}{\sqrt{r^2-1}} \end{aligned}$$

O plano $\phi = 1$ é enviado por esta mudança de coordenadas para a curva $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, pois

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \phi^2 r^2 \cos^2 \theta + \phi^2 r^2 \sin^2 \theta = \phi^2 r^2 \\ 1 + z^2 &= 1 + (\sqrt{r^2 - 1})^2 = r^2 \end{aligned}$$

portanto

$$\phi^2 r^2 = r^2$$

implica

$$\phi = 1$$

De mesmo jeito temos que a mudança de coordenadas envia o plano $\phi = 2$ para a curva $x^2 + y^2 = 2(1 + z^2)$. Também notemos que para $|z| \leq a$ temos que

$$|\sqrt{r^2 - 1}| = \sqrt{r^2 - 1}$$

implica

$$r \leq \sqrt{a^2 + 1}, \quad 1 \leq r$$

Além que mostra que a mudança de coordenadas tem como imagem o semiespaço superior.

Agora temos que o domínio de integração nesta novas coordenadas esta dado por

$$D' = \left\{ (r, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq \sqrt{a^2 + 1}, 1 \leq \phi \leq 2 \right\}$$

Assim

$$\text{Massa} = \iiint_D z^2 dz dy dx$$

pela simetria de z^2 em relação ao plano xy temos

$$\begin{aligned}
 \text{Massa} &= 2 \iiint_D z^2 dz dy dx, \quad 0 < z \\
 &= 2 \iiint_{D'} z^2 dz dy dx \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{a^2+1}} (\sqrt{r^2-1})^2 \cdot \frac{\phi r^3}{\sqrt{r^2-1}} dr d\phi d\theta, \quad \text{pelo T.M.V} \\
 &= 2 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\phi^2}{2} \Big|_{\phi=1}^{\phi=\sqrt{2}} \right) \cdot \int_1^{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{r^2-1} r^3 dr
 \end{aligned}$$

□

Usando a primitiva auxiliar

$$\int \sqrt{r^2-1} r^3 dr = \frac{1}{15} (r^2-1)^{\frac{3}{2}} (3r^2+2) + c$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \text{Massa} &= 2\pi \frac{1}{15} (r^2-1)^{\frac{3}{2}} (3r^2+2) \Big|_{r=1}^{r=\sqrt{a^2+1}} \\
 &= 2\pi \left(\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} \right).
 \end{aligned}$$

16. Calcule

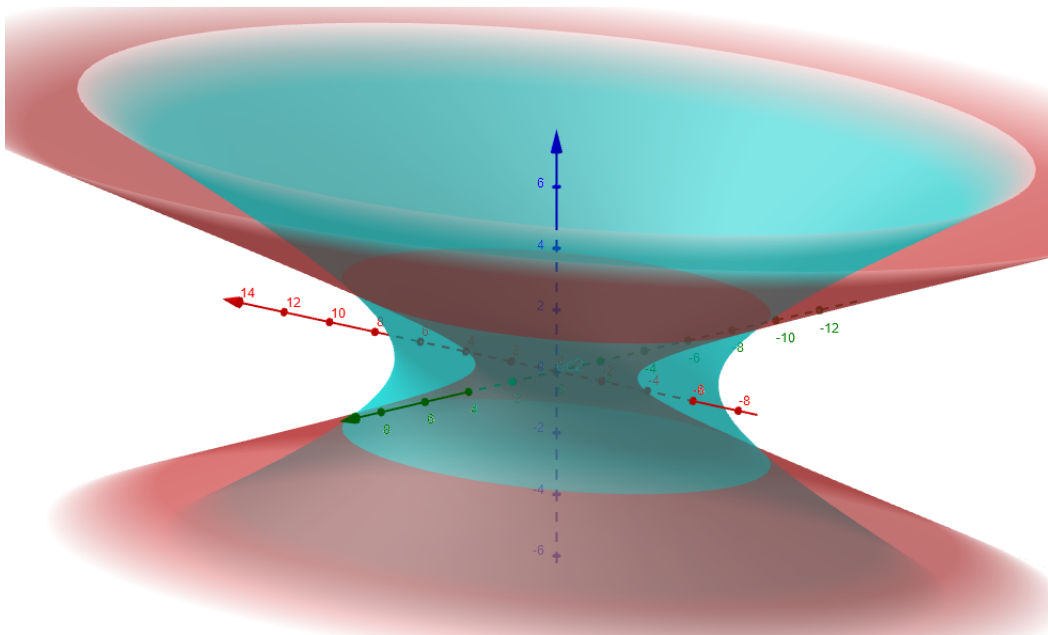
$$\iiint_R z dz dy dx,$$

onde R é limitada por

(a)

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 + z^2, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 + \frac{z^2}{2}, \quad \text{para } 0 \leq z.$$

Considere a seguinte figura



Vamos a usar o seguinte mudança de coordenadas

$$x = 3r\phi \cos \theta, \quad y = 2r\phi \sin \theta, \quad z = \sqrt{2r^2 - 1}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < \phi$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < r$.

Note que

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 3\phi \cos \theta & -3r\phi \sin \theta & 3r \cos \theta \\ 2\phi \sin \theta & 2r\phi \cos \theta & 2r \sin \theta \\ 2\frac{r}{\sqrt{2r^2-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \frac{\phi r^3}{\sqrt{2r^2-1}} \end{aligned}$$

Para essa mudança de coordenadas temos que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= \frac{(3r\phi \cos \theta)^2}{9} + \frac{(3r\phi \sin \theta)^2}{4} = r^2\phi^2 \\ 1 + z^2 &= 1 + (\sqrt{2r^2 - 1})^2 = r^2 \\ 4 + \frac{z^2}{2} &= 4 + \frac{(\sqrt{2r^2 - 1})^2}{2} = \frac{7}{2} + r^2 \end{aligned}$$

o que implica que as curvas

$$\begin{aligned}\phi &= \sqrt{2} \\ r &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2 - 1}}\end{aligned}$$

são mapeadas para as curvas $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 + z^2$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 + \frac{z^2}{2}$. Para isso acontecer precisamos que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} &\leq \frac{7}{2\sqrt{\phi^2 - 1}} = r \\ \phi &\leq 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Agora temos que a região de integração muda baixo a mudança de coordenadas para a região

$$R' = \left\{ (r, \phi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \sqrt{2} \leq \phi \leq 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2 - 1}} \right\}$$

assim

$$\begin{aligned}\text{Massa} &= \iiint_R z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2 - 1}}} (\sqrt{\phi^2 - 1}) \cdot \frac{12\phi r^3}{\sqrt{\phi^2 - 1}} \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= 24\pi \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2 - 1}}} \phi r^3 \, dr \, d\phi \\ &= 24\pi \cdot \frac{9}{8} \\ &= 27\pi.\end{aligned}$$