

Resoluções

MAT2219— Lista 1

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_{\mathbf{R}} (2y^2 - 3xy^3) dx dy,$$

onde $\mathbf{R} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}} 2y^2 - 3xy^3 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^3 (2y^2 - 3xy^3) dy \right) dx = \int_1^2 \left(2\frac{y^2}{2} - 3x\frac{y^4}{4} \right) \Big|_{y=0}^{y=3} dx \\ &= \int_1^2 18 - 3^5 \frac{x}{4} dx = \left(18x - 3^5 \frac{x^2}{8} \right) \Big|_1^2 = \frac{-585}{8}. \end{aligned}$$

□

(b)

$$\iint_{\mathbf{R}} x \sin y dx dy,$$

onde $\mathbf{R} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$.

Resp. (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$.

(c)

$$\iint_{\mathbf{R}} \frac{1}{x+y} dx dy,$$

onde $\mathbf{R} = [1, 2] \times [0, 1]$.

Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

Demonstração. Note que a região de integração está dado por

$$\mathbf{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\text{Vol} = \int_0^1 \left(\int_0^1 x \sqrt{x^2 + y} dy \right) dx$$

Primitiva auxiliar 1.

$$\int a \sqrt{b + y} dy = 2a \frac{(b + y)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{const}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x (x^2 + y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} \left(x(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - x^4 \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} \left(x(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right) dx - \int_0^1 \frac{2}{3} x^4 dx \end{aligned}$$

Primitiva auxiliar 2.

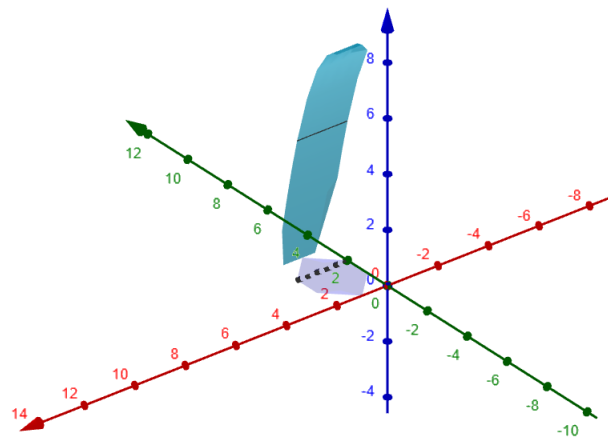
$$\int \frac{2}{3} x (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{15} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} + \text{const}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \frac{2}{15} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{3} \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{4}{15} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

□

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

Demonstração. Considere o seguinte gráfico



Note que para que a função $z(x, y) = 9 - y^2$ fique no primeiro octante devemos ter que $0 \leq y \leq 3$, assim a região de integração é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_0^2 \left(\int_0^3 9 - y^2 \right) dx = \int_0^2 \left(9y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=3} dx \\ &= 36. \end{aligned}$$

□

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy. \quad \text{Resp. } \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2}.$$

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

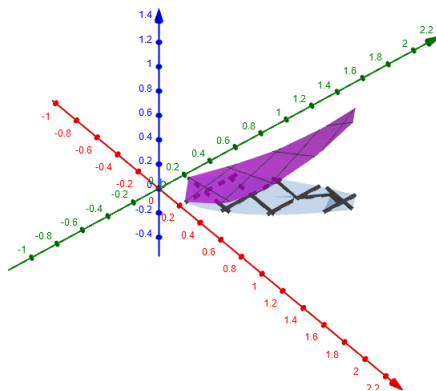
5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Demonstração. Considere o seguinte gráfico



$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

□

(b)

$$\iint_D (x^2 - 2xy) \, dx \, dy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$.

Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c)

$$\iint_D e^{x/y} \, dx \, dy,$$

onde $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_1^2 ye^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=y}^{x=y^3} dy \\ &= \int_1^2 (ye^{y^2} - ye) dy = \frac{1}{2}e^{y^2} \Big|_{y=1}^{y=2} - \frac{y^2}{2}e \Big|_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{1}{2}e^4 - 2e.\end{aligned}$$

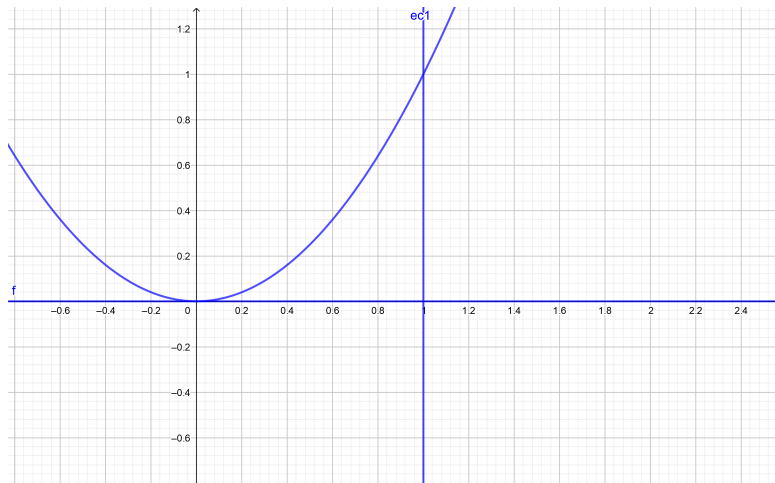
□

(d)

$$\iint_D x \cos y \, dx dy,$$

onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

Demonstração. Considere o seguinte gráfico



dado que a curva $y = x^2$ e a reta $y = 0$ intersectam em $(0, 0)$ temos que a região de integração é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_D x \cos y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x \cos y \, dy \right) dx = \int_0^1 (-x \sin y) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 -x(\sin x^2 - \sin 0) dx \\ &= \int_0^1 -x \sin x^2 dx = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).\end{aligned}$$

□

(e)

$$\iint_D 4y^3 \, dx \, dy,$$

onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f)

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

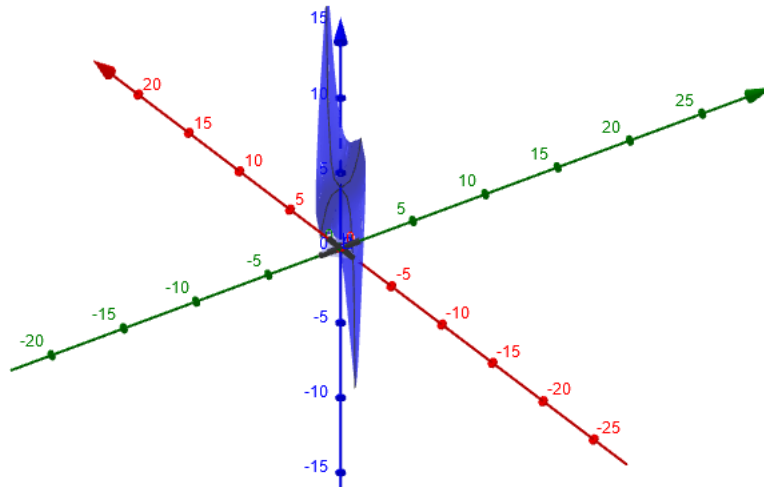
(g)

$$\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4) \, dx \, dy,$$

onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Resp. (g) 8π .

Demonstração. Considere o seguinte gráfico



Observe que o gráfico tem um simetria em relação ao ponto $(0,0,4)$.

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \tan x + y^3 + 4 dx dy &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 \tan x + y^3 + 4 dy \right) dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 \tan x dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y^3 dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4 dy \right) dx \end{aligned}$$

Note que a função y^3 é ímpar, logo

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y^3 dy &= 0, \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2x^2 \tan x \sqrt{2-x^2} + 8\sqrt{2-x^2}) dx. \end{aligned}$$

De novo a função $2x^2 \tan x \sqrt{2-x^2}$ é ímpar, assim

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2 \tan x \sqrt{2-x^2} dx = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \tan x + y^3 + 4 dx dy &= 8 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2-x^2} x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

□

(h) Calcule

$$\iint_D e^{y-x} dx dy$$

sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$.

Demonstração. Para esta integral vamos dividir a região de integração D em duas regiões disjuntas

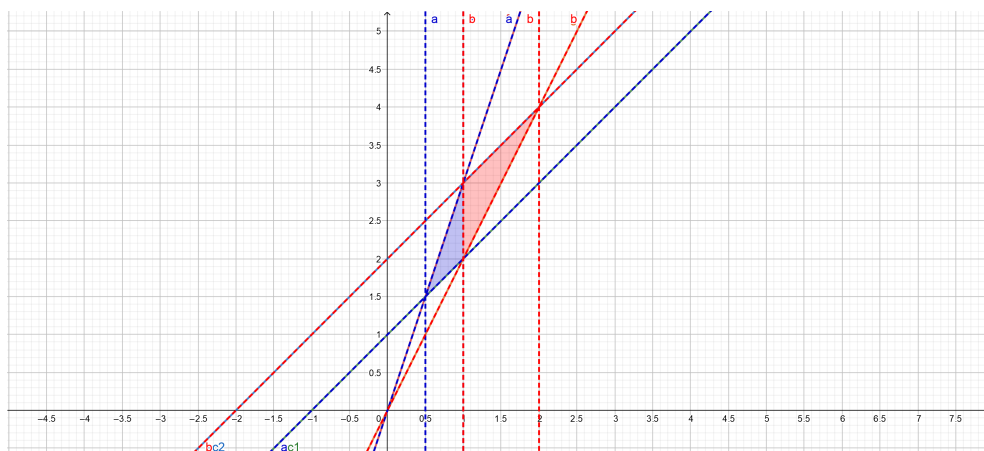
$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, x + 1 \leq y \leq 3x \right\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 2x \leq y \leq x + 2\}$$

que vão facilitar o cálculo

$$D = D_1 \cup D_2.$$



Logo

$$\iint_D e^{y-x} dx dy = \iint_{D_1} e^{y-x} dx dy + \iint_{D_2} e^{y-x} dx dy.$$

Calculando por partes temos o seguinte

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} e^{y-x} dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{x+1}^{3x} e^{y-x} dx \right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{-x} e^y) \Big|_{y=x+1}^{y=3x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} (e^{3x} - e^{x+1}) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} - e^x \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} e^2 - e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} e^{y-x} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{2x}^{x+2} e^{y-x} dy \right) dx = \int_1^2 -x (e^y \Big|_{y=2x}^{y=x+2}) dx \\ &= \int_1^2 e^{-x} (e^{x+2} - e^{2x}) dx = \int_1^2 e^2 - e^x dx \\ &= e^2 x \Big|_{x=1}^{x=2} - e^x \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= e. \end{aligned}$$

Assim

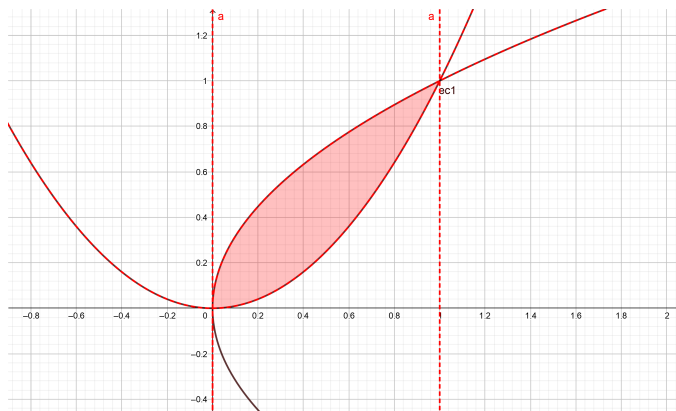
$$\iint_D e^{y-x} dx dy = e + \frac{1}{2} e^2 - e = \frac{1}{2} e^2.$$

□

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

- (a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.

Demonstração. A região limitada no plano xy é



Agora o calculo

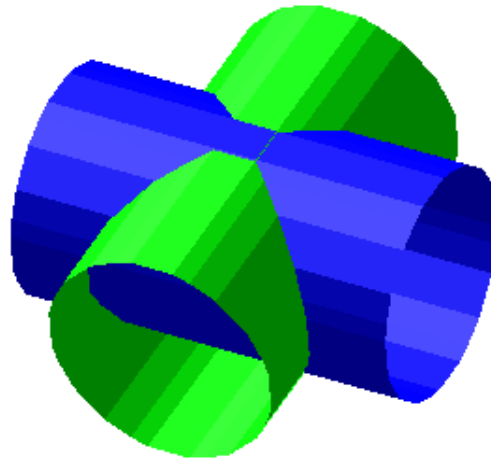
$$\begin{aligned}
 \text{Vol} &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 x^{2+\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^{2+2} - \frac{x^6}{3} dx \\
 &= \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{(\frac{3}{2}+1)3} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^{4+1}}{4+1} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^{6+1}}{(6+1)3} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{6}{35}.
 \end{aligned}$$

□

- (b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.
- (c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano $x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \arcsen(\frac{2}{3})$.
- (d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.
- (e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Demonstração. Considere a seguinte figura



Pela simetria o volume de S desta figura é 8 vezes o volume intersectado com o primeiro octante, assim

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx \right) dy = 8 \int_0^a \sqrt{a^2-y^2} \sqrt{a^2-y^2} dy \\ &= 8 \int_0^a a^2 - y^2 dy = 8a^2a - 8 \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=a} \\ &= \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

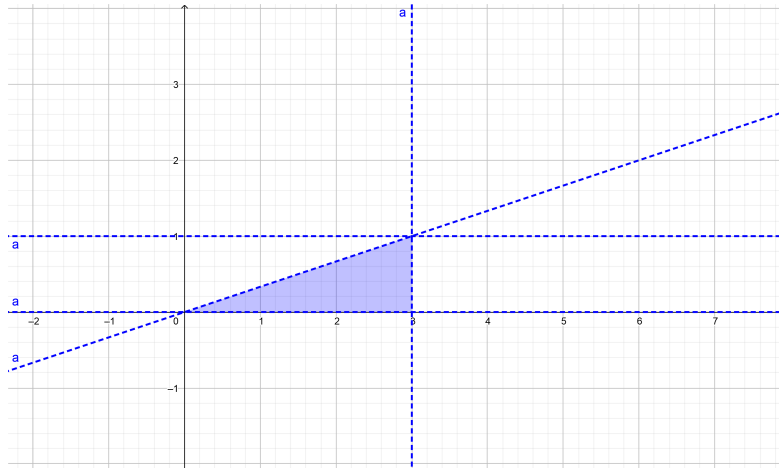
□

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.
8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx \, dy$

Demonstração. Note que a região de integração é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 3y \leq x \leq 3\} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{x}{3} \right\}$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx \right) dy &= \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} \, dy \right) dx \\ &= \int_0^3 e^{x^2} y \Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{3}} dx \\ &= \int_0^3 e^{x^2} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{1}{6} (e^9 - 1). \end{aligned}$$

□

$$(b) \int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

$$(d) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$$

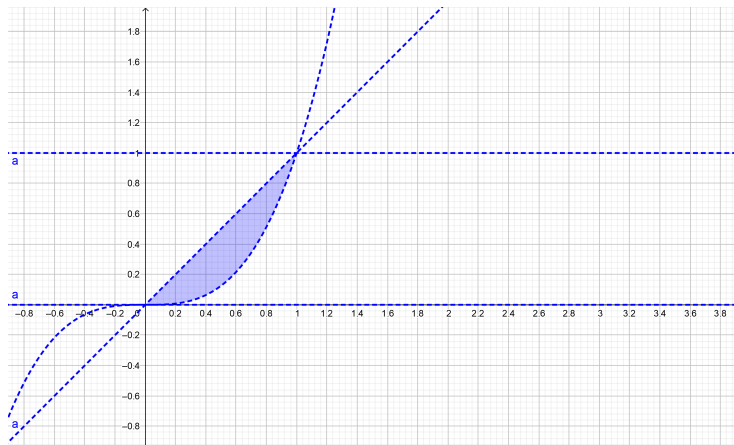
$$(e) \int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2 dx dy.$$

Demonstração. Primeiramente note que para $0 \leq y \leq 1$ temos $\sqrt[3]{y} \leq y$, assim

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2 dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^y (-\sin x^2) dx dy.$$

Logo note que a região de integração é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt[3]{y}\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^y (-\sin x^2) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^x (-\sin x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 (-\sin x^2 y) \Big|_{y=x^3}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 -x \sin x^2 dx + \int_0^1 x^3 \sin x^2 dx. \end{aligned}$$

Agora considerando as primitivas auxiliares

$$\int -x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \cos x^2 + c, \quad \int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2 \cos x^2) + c$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^3}^x -\sin x^2 dy dx &= \frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2 \cos x^2) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \cos 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 1 - 1) \end{aligned}$$

□

Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4} \sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e - 1)$, (e) $\frac{1}{2}(\sin(1) - 1)$.

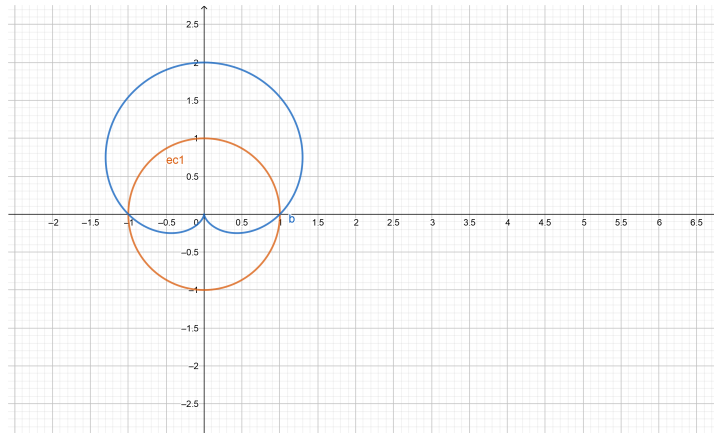
9. Calcule as integrais:

(a) $\iint_R x \, dx dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\iint_R xy \, dx dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin \theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

Demonstração. Consideremos a região de integração



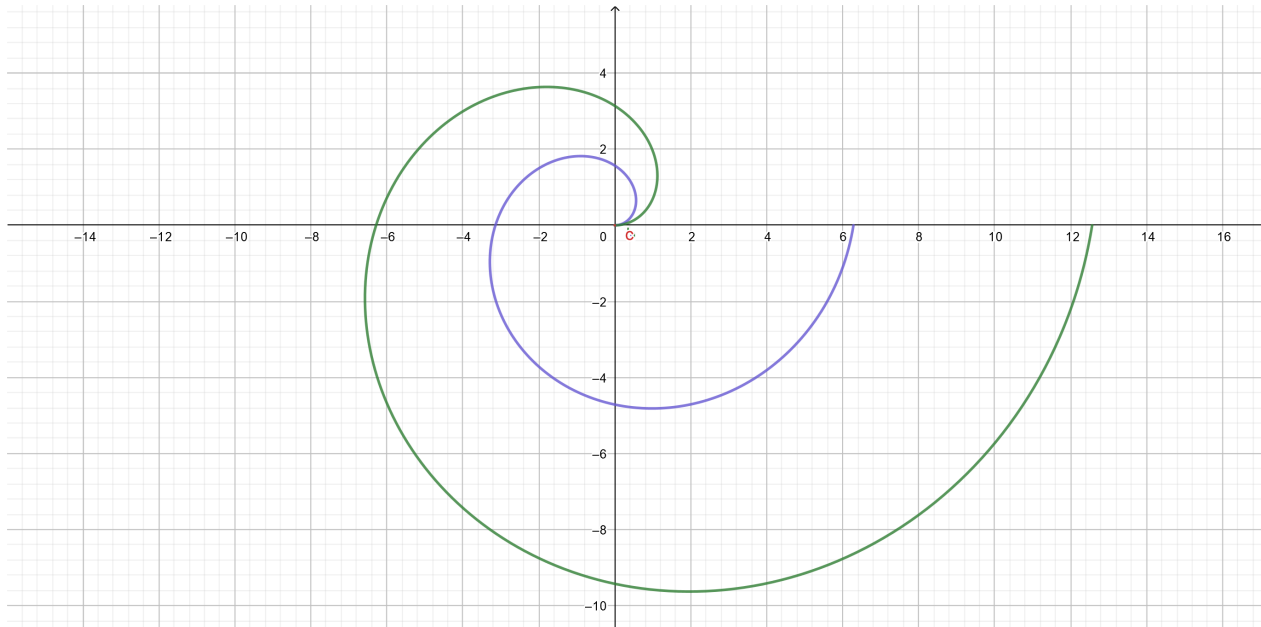
Usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \int_0^\pi \int_1^{1+\sin \theta} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\sin \theta} 1 dr d\theta, \quad \text{pela simetria} \\
 &= 2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -2 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

□

- (d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demonstração. Considere o gráfico



Logo

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbf{R}} x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{2\theta} r^2 r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_{\theta}^{2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{(2\theta)^4}{4} - \frac{\theta^4}{4} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} \theta^4 d\theta = \left. \frac{15}{4} \frac{\theta^5}{5} \right|_0^{2\pi} \\
 &= 24\pi^4.
 \end{aligned}$$

□

(e) $\iint_D (e^{-x^2-y^2}) dx dy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ e o eixo y .

(f) $\iint_D \sqrt{(x-1)^2 + y^2} dx dy$ sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Seja B o conjunto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$. Verifique que

$$\iint_B f(x, y) dx dy = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho f(a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta) d\rho \right] d\theta.$$

11. Seja B o conjunto $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2$ ($r > 0$, α e β reais dados)
Verifique que

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \rho g(\theta, \rho) d\rho \right] d\theta.$$

onde $g(\theta, \rho) = f(x, y)$, $x = \alpha + \rho \cos \theta$ e $y = \beta + \rho \sin \theta$.

12. Calcule a seguinte integral

$$\iint_B \arctan(y/x) dx dy$$

onde B é a região do primeiro quadrante, limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x$, $y = \sqrt{3}$.

Resp. $\frac{7\pi^2}{192}$.