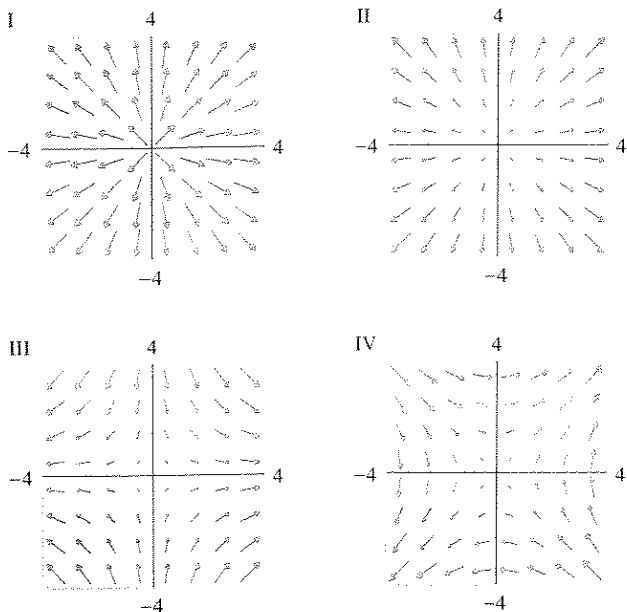


29–32 □ Case as funções f com os desenhos de seus campos de vetor gradiente (rotulados de I-IV). Dê razões para suas escolhas.



29. $f(x, y) = xy$ 30. $f(x, y) = x^2 - y^2$
 31. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 32. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

33. As **linhas de fluxo** (ou **linhas de correnteza**) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de fluxo.
 (a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de fluxo. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de fluxo?
 (b) Se as equações paramétricas de uma linha de fluxo são $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem a equação diferencial $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Em seguida resolva as equações diferenciais para determinar uma equação para as linhas de fluxo que passe pelo ponto $(1, 1)$.
 34. (a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e algumas linhas de fluxo. Qual é o formato que essas linhas de fluxo parecem ter?
 (b) Se as equações paramétricas das linhas de fluxo são $x = x(t)$, $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.
 (c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por \mathbf{F} , determine uma equação para a trajetória percorrida.

16.2 Integrais de Linha

Nesta seção definimos uma integral que é semelhante a uma integral de uma função de uma variável real, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C . Tais integrais são chamadas *integrais de linha*, apesar de a expressão “integrais curvas” ser a mais adequada. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de líquidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$\boxed{1} \quad x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

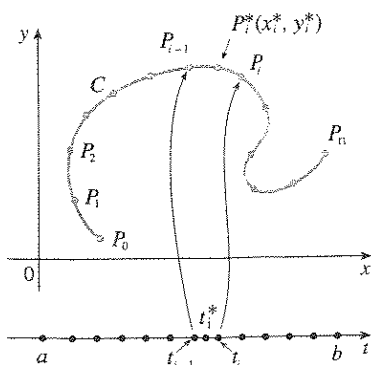


FIGURA 1

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, e admitiremos que C seja uma curva lisa. [Isso significa que \mathbf{r}' é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Veja a Seção 13.2.] Se dividirmos o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem C em n subarcs de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ (veja a Figura 1). Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i -ésimo subarco. (Isso corresponde a um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$.) Se f é uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C , calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*) , multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

o que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição por analogia com a integral de função de uma variável real.

2 Definição Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas Equações 1, então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.3 achamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\text{3} \quad \int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que cada ponto da curva seja atingido uma única vez quando t cresce de a para b .

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de guardar a Fórmula 3 é escrever tudo, em termos do parâmetro t . Usando a parametrização para exprimir x e y em termos de t , temos ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

No caso especial onde C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, tomando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C assim: $x = x$, $y = 0$, $a \leq x \leq b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, 0) \, dx$$

e nesse caso a integral de linha se reduz a uma integral de função de uma variável real.

Assim como para as integrais de funções de uma variável real, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) \, ds$ representa a área de um lado da “cerca” ou “cortina” da Figura 2 cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

EXEMPLO 1 □ Calcule $\int_C (2 + x^2y) \, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

□ A função comprimento de arco s está ilustrada na Seção 13.3.

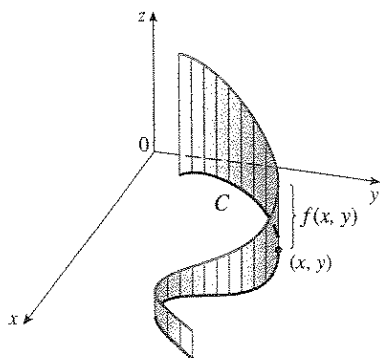


FIGURA 2

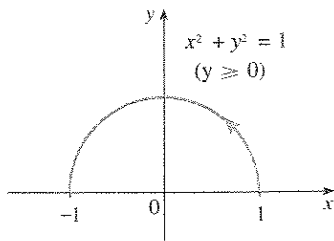


FIGURA 3

SOLUÇÃO Para usar a Fórmula 3 precisamos de equações paramétricas que representem a curva C . Como já vimos, o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \quad y = \text{sen } t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3). Logo, da Fórmula 3, temos

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2y) \, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \text{sen } t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \text{sen } t) \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \text{sen } t) \, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

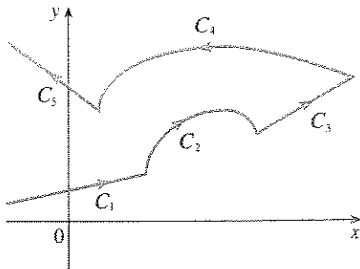


FIGURA 4
Curva lisa por trechos

Suponha agora que C seja uma **curva lisa por trechos**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n , onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i . Então, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho liso de C :

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_{C_1} f(x, y) \, ds + \int_{C_2} f(x, y) \, ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) \, ds$$

EXEMPLO 2 □ Calcule $\int_C 2x \, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x ; então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 2x \, ds &= \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \\ &= \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \end{aligned}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \leq y \leq 2$$

e

$$\int_{C_2} 2x \, ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} \, dy = \int_1^2 2 \, dy = 2$$

Então

$$\int_C 2x \, ds = \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

□

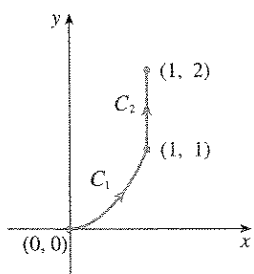


FIGURA 5
 $C = C_1 \cup C_2$

Qualquer interpretação física da integral de linha $\int_C f(x, y) ds$ depende da interpretação física da função f . Suponha que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com o formato de uma curva C . A massa da parte do arame do ponto P_{i-1} até P_i na Figura 1 é aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$, e então a massa total do arame terá valor aproximado de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$. Tomando mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da massa m do arame como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

[Por exemplo: se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um arame semicircular, então a integral do Exemplo 1 representa a massa do arame.] O **centro de massa** do arame com função densidade ρ está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\boxed{4} \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds$$

Outra interpretação física da integral de linha será discutida adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3 □ Um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto é proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante, e então a massa do arame é

$$\begin{aligned} m &= \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t) dt \\ &= k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2) \end{aligned}$$

Das Equações 4, temos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_C yk(1 - y) ds \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{\pi - 2} \left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \end{aligned}$$

Por simetria vemos que $\bar{x} = 0$, e o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \right) \approx (0, 0,38)$$

(Veja a Figura 6.) □

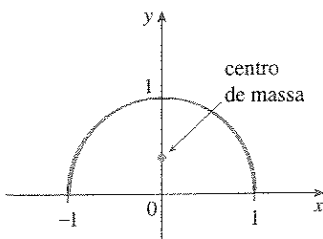


FIGURA 6

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas **integrais de linha de f ao longo de C com relação a x e y** :

$$\boxed{5} \quad \int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\boxed{6} \quad \int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y) ds$ das Equações 5 e 6, chamamos a mesma de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$.

$$\boxed{7} \quad \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t) dt$$

Freqüentemente ocorre de as integrais de linha com relação a x e y aparecerem juntas. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Quando estamos nos organizando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar em uma representação paramétrica para uma curva cuja descrição geométrica é dada. Em particular, freqüentemente precisamos parametrizar um segmento de reta, e portanto é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em \mathbf{r}_0 e termina em \mathbf{r}_1 é dada por

$$\boxed{8} \quad \mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4 □ Calcule $\int_C y^2 dx + x dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ (veja a Figura 7).

SOLUÇÃO

(a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Use a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Assim $dx = 5 dt$, $dy = 5 dt$, e a Fórmula 7 nos dá

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5 dt) + (5t - 5)(5 dt) \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

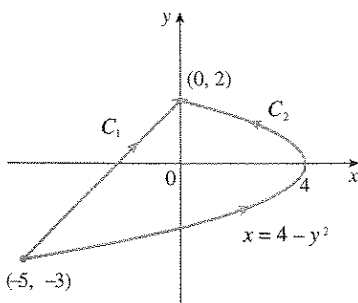


FIGURA 7

(b) Como a parábola é dada em função de y , vamos usar y como parâmetro e escrever C_2 como

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

Então $dx = -2y \, dy$, e pela Fórmula 7, temos

$$\begin{aligned} \int_{C_2} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y) dy + (4 - y^2) dy \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Note que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Assim, em geral, o valor de uma integral de linha depende não somente dos pontos extremos da curva, como também da própria trajetória (veja a Seção 16.3 para condições nas quais a integral independe da trajetória).

Note também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \quad y = 2 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2 dx + x dy = \frac{5}{6}$$

Em geral, uma parametrização dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina uma **orientação** de uma curva C , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C , mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y) dx = -\int_C f(x, y) dx \quad \int_{-C} f(x, y) dy = -\int_C f(x, y) dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não mudará quando revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

Isso é porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando revertemos a orientação de C .

Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

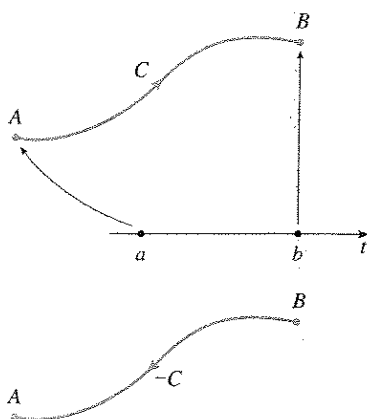


FIGURA 8

ou pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C , então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito para curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto com notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial quando $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (ver a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C com relação a x , y e z . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \end{aligned}$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano podemos calcular integrais da forma

$$\boxed{10} \quad \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t .

EXEMPLO 5 □ Calcule $\int_C y \sin z ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (veja a Figura 9).

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} [t - \frac{1}{2} \sin 2t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 □ Calcule $\int_C y dx + z dy + x dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 que une $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

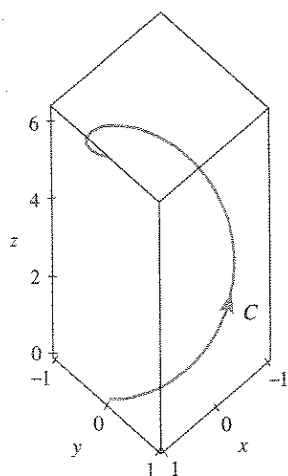


FIGURA 9

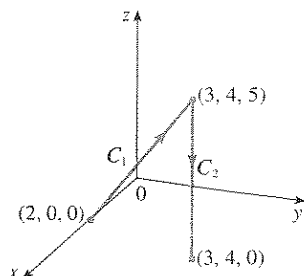


FIGURA 10

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C . Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \quad y = 4t \quad z = 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^1 (4t) \, dt + (5t)4 \, dt + (2 + t)5 \, dt \\ &= \int_0^1 (10 + 29t) \, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 24,5 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, C_2 pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

$$\text{ou} \quad x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então $dx = 0 = dy$, logo

$$\int_{C_2} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^1 3(-5) \, dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = 24,5 - 15 = 9,5$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se da Seção 6.4 do Volume I em que o trabalho feito por uma força $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é $W = \int_a^b f(x) \, dx$. Depois, na Seção 12.3, achamos que o trabalho feito por uma força constante \mathbf{F} para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo de força contínuo no \mathbb{R}^3 , tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1. (Um campo de força em \mathbb{R}^2 pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y .) Queremos calcular o trabalho exercido por essa força movimentando uma partícula ao longo de uma curva lisa C .

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho (veja a Figura 1 para o caso bidimensional ou a Figura 11 para o caso tridimensional). Escolha $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondendo ao valor do parâmetro t_i^* . Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva se processa aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente a P_i^* . Então, o trabalho feito pela força \mathbf{F} para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

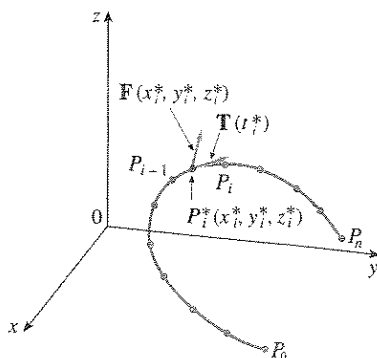


FIGURA 11

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o versor tangente ao ponto (x, y, z) sobre C . Intuitivamente podemos ver que essas aproximações devem ficar melhores quando n aumenta muito. Portanto definimos o **trabalho** W feito por um campo de força \mathbf{F} como o limite da soma de Riemann dada por (11), ou seja,

$$(12) \quad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

A Equação 12 nos diz que o trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, e da Equação 9 podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

Essa última integral é freqüentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto podemos definir a integral de linha para um campo vetorial contínuo qualquer.

(13) **Definição** Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então a **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Quando usamos a Definição 13, devemos nos lembrar de que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é uma abreviação para $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, e calculamos $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tomando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Note também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) \, dt$

□ A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

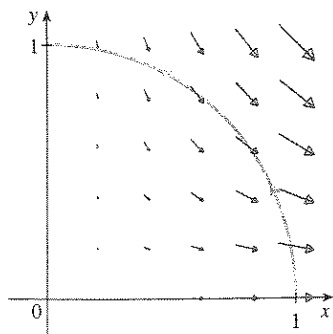


FIGURA 12

EXEMPLO 7 □ Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

SOLUÇÃO Como $x = \cos t$ e $y = \sin t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= 2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

□

NOTA □ Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocaram de sinal quando a orientação do caminho é invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque o vetor tangente \mathbf{T} é substituído por seu negativo quando C é trocado por $-C$.

□ A Figura 13 mostra a cúbica torcida C do Exemplo 8 e alguns vetores típicos agindo em três pontos de C .

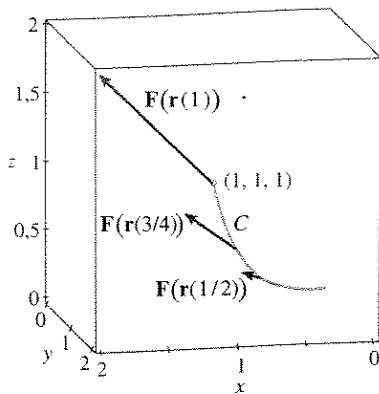


FIGURA 13

EXEMPLO 8 □ Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3 \mathbf{i} + t^5 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_0^1 = \frac{27}{28} \end{aligned}$$

Finalmente, notamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 seja dado sob a forma de componentes pela equação $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular sua integral de linha ao longo de C :

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot (x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

Mas essa última integral é precisamente a integral de linha de (10). Portanto, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{onde } \mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

Por exemplo: a integral $\int_C y dx + z dy + x dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde

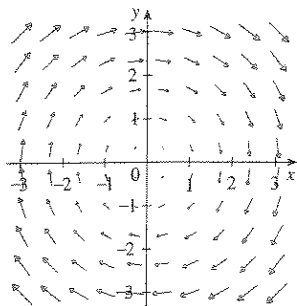
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

16.2 Exercícios

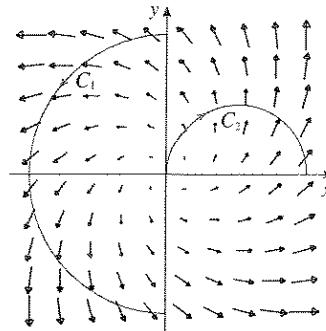
1–16 □ Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

- $\int_C y \, ds$, $C: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 2$
- $\int_C (y/x) \, ds$, $C: x = t^4, y = t^3, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$
- $\int_C xy^4 \, ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$
- $\int_C ye^x \, ds$, C é o segmento de reta que liga $(1, 2)$ a $(4, 7)$
- $\int_C (xy + \ln x) \, dy$,
 C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(3, 9)$
- $\int_C xe^y \, dx$,
 C é o arco de curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$
- $\int_C xy \, dx + (x - y) \, dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.
- $\int_C \sin x \, dx + \cos y \, dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ e o segmento de reta de $(-1, 0)$ a $(-2, 3)$.
- $\int_C xy^3 \, ds$, $C: x = 4 \sin t, y = 4 \cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq \pi/2$
- $\int_C x^2z \, ds$, C é o segmento de reta de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$
- $\int_C xe^{yz} \, ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$
- $\int_C (2x + 9z) \, ds$, $C: x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$
- $\int_C x^2y\sqrt{z} \, dz$, $C: x = t^3, y = t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
- $\int_C z \, dx + x \, dy + y \, dz$, $C: x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
- $\int_C (x + yz) \, dx + 2x \, dy + xyz \, dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$
- $\int_C x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$, e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$

17. Seja \mathbf{F} o campo vetorial mostrado na figura.
- Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.
 - Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.



18. A figura mostra um campo vetorial \mathbf{F} e duas curvas, C_1 e C_2 . As integrais de linha de \mathbf{F} sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



- 19–22 □ Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
- $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3 \mathbf{i} - y\sqrt{x} \mathbf{j}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - t^3 \mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} - x \mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi$
- 23–24 □ Use um gráfico do campo vetorial \mathbf{F} e a curva C para dizer se a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida calcule a integral.
- $\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$
 - $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$, C é a parábola de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$
25. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1} \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0, 1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).
26. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{j} + y \mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}, -1 \leq t \leq 1$.
- (b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

27. Determine o valor exato de $\int_C x^3 y^5 ds$, onde C é a parte da astróide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ no primeiro quadrante.
28. Determine o valor exato de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 e^y \mathbf{i} + \ln z \mathbf{j} + \sqrt{y^2 + z^2} \mathbf{k}$ e C é o segmento de reta entre $(1, 2, 1)$ a $(6, 4, 5)$.
29. Se C é a curva com equações paramétricas $x = \ln t$, $y = e^{-t}$, $1 \leq t \leq 2$, use uma calculadora ou CAS para calcular a integral de linha $\int_C x \sin y ds$ com precisão até a terceira casa decimal.
30. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.
(b) Utilize um sistema algébrico computacional para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta da parte (a).
31. Um arame fino é entortado no formato de uma semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante k , determine a massa e o centro de massa do arame.
32. Determine a massa e o centro de massa de um arame fino no formato de um quarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, se a função densidade for $\rho(x, y) = x + y$.
33. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com função densidade $\rho(x, y, z)$ e forma da curva espacial C .
(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade for uma constante k .
34. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da distância do ponto à origem.
35. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C , seu **momento de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos como
- $$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds$$
- Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 33.
36. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C , seu **momento de inércia** em relação aos eixos x , y e z são definidos como
- $$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$
- $$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$
- $$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$
- Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 33.
37. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x \mathbf{i} + (y + 2) \mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
38. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x \sin y \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.
39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x + z, x + y \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.
40. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1). Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.
41. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de pintura de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é feito pelo homem contra a gravidade para chegar ao topo?
42. Suponha que haja um furo na lata de pintura do Exercício 41 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?
43. (a) Mostre que um campo de força constante realiza um trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?
44. A base de uma cerca de raio 10 m é dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0,01(x^2 - y^2)$, portanto a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha que 1L de tinta cubra 100 m^2 . Faça um esboço da cerca e determine quanto de tinta você necessitará para pintar os dois lados da cerca.
45. Um objeto se move sobre a curva C mostrada na figura de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força \mathbf{F} são medidos em newtons pela escala dos eixos. Estime o trabalho realizado por \mathbf{F} sobre o objeto.

