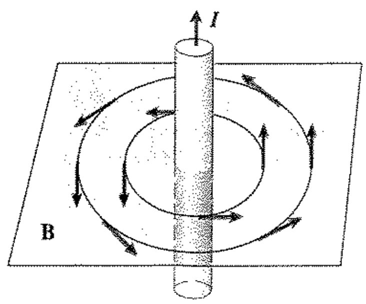
46. Experimentos mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio e cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e estabelece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade do espaço livre. Tomando C como um círculo com raio r, mostre que a amplitude $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético à distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

Lembre-se da Seção 5.3 do Volume I em que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F' é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 também é chamada Teorema da Variação Total: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f da função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

> $\boxed{2}$ **Teorema** Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então
>
> $$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

NOTA □ O Teorema 2 nos diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) sabendo apenas o valor de f nos pontos terminais de C. De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total de f. Se f é uma função de duas variáveis e C, uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, o Teorema 2 fica

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C, uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vamos provar o Teorema 2 nesse caso.

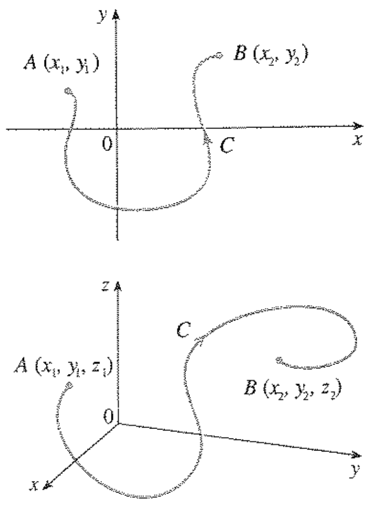


FIGURA 1

Prova do Teorema 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$
\begin{aligned}
\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \qquad \text{(pela Regra da Cadeia)} \\
&= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))
\end{aligned}
$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1).

Apesar de termos provado o Teorema 2 para curvas lisas, ele também vale para curvas lisa por trecho. Isso pode ser visto subdividindo-se C em um número finito de curvas lisas e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 □ Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula com massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva lisa por trechos C (veja o Exemplo 4 da Seção 16.1).

SOLUÇÃO Da Seção 16.1 sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$
\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\
&= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\
&= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right)
\end{aligned}
$$

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas lisas por trecho (chamadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto terminal B. Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínuo. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente dos pontos extremos da curva.

Em geral, se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer

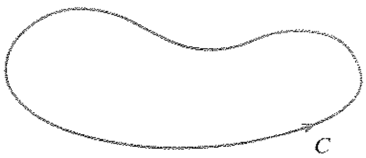


FIGURA 2
Um curva fechada

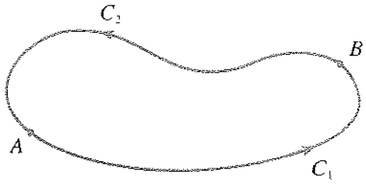


FIGURA 3

dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho.*

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto terminal coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A (veja a Figura 3). Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho, como segue. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, provamos o seguinte teorema.

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo $\mathbf{F}$ é independente do caminho, segue-se que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir fala que *somente* campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele está estabelecido e provado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admitiremos que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existe uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, admitiremos que D seja **conexo**. Isso significa que quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em D.

4 Teorema Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Prova Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D. Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para qualquer ponto (x, y) em D. Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, não interessa qual o caminho de integração utilizado entre (a, b) e (x, y) para definir $f(x, y)$. Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y). Escolha qualquer ponto (x_1, y) na bola aberta com $x_1 < x$ e considere C como qualquer caminho C_1 de (a, b) a (x_1, y) seguido pelo segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y) (veja a Figura 4). Então

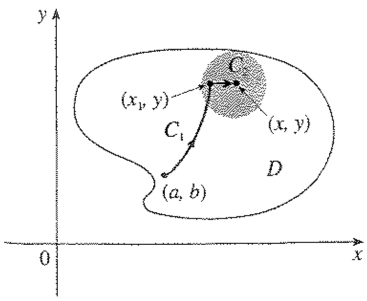


FIGURA 4

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Note que a primeira dessas integrais não depende de x, e assim

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevermos $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, então

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Sobre C_2, y é constante, $dy = 0$. Usando t como parâmetro, onde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

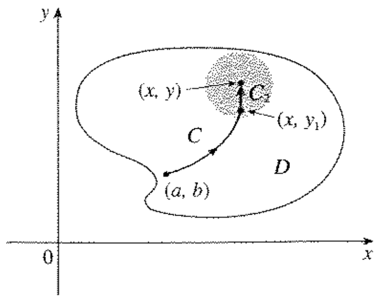


FIGURA 5

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3 no Volume I).
Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

Então $$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

que mostra que $\mathbf{F}$ é conservativo. □

Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ seja conservativo, onde P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

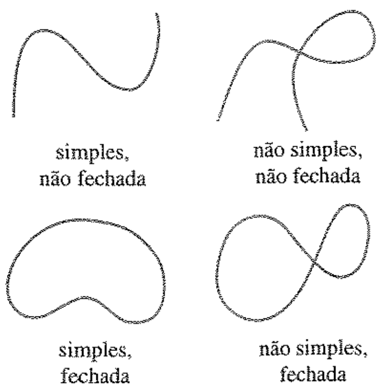


FIGURA 6
Tipos de curvas

5 Teorema Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

O recíproco do Teorema 5 só é verdadeiro para um tipo especial de região. Para explicar isso precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se intercepta em nenhum ponto entre os pontos terminais. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva simples fechada, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

No Teorema 4 precisamos de região conexa. Para o próximo teorema precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** em um plano é uma região

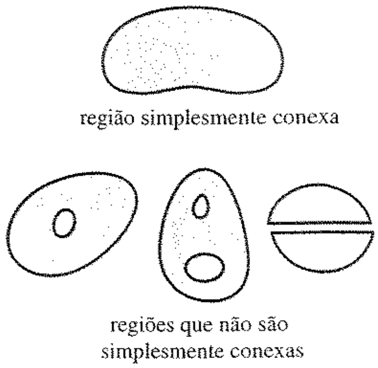


FIGURA 7

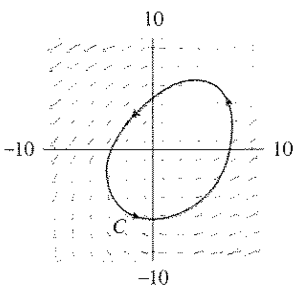


FIGURA 8

□ As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar basicamente para a mesma direção que C. Assim parece que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ e portanto $\mathbf{F}$ não é conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C_1 e C_2 na Figura 9 apontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam 0. O Exemplo 3 mostra que de fato $\mathbf{F}$ é conservativo.

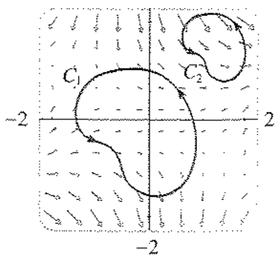


FIGURA 9

conexa D tal que toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D. Note que, da Figura 7, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Para regiões simplesmente conexas podemos estabelecer o recíproco do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção como conseqüência do Teorema de Greens.

6 Teorema Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{por toda a região } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

EXEMPLO 2 □ Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, $\mathbf{F}$ não é conservativo. □

EXEMPLO 3 □ Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de $\mathbf{F}$ é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$), que é aberto e simplesmente conexo. Portanto podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que $\mathbf{F}$ é conservativo. □

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que $\mathbf{F}$ é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A prova do Teorema 4 dá indícios de como encontrar f. Usamos "integração parcial", como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 □

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

SOLUÇÃO

(a) Do Exemplo 3 sabemos que **F** é conservativo, e assim existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \tag{7}$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2 \tag{8}$$

Integrando (7) com relação a x, obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y) \tag{9}$$

Note que a constante de integração é uma constante em relação a x, ou seja, uma função de y, que chamamos $g(y)$. Em seguida diferenciamos ambos os lados de (9) em relação a y:

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y) \tag{10}$$

Comparando (8) e (10), vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em (9), temos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicar o Teorema 2 devemos conhecer os pontos inicial e final de C, ou seja, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos $K = 0$. Assim temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1)$$

$$= e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2. □

Um critério para determinar se um campo vetorial **F** em $\mathbb{R}^3$ é ou não conservativo será dado na Seção 16.5. Enquanto isso, o próximo exemplo mostra que a técnica para achar funções potenciais é muito semelhante à utilizada para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 5 □ Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, determine uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f, então

$$f_x(x, y, z) = y^2 \tag{11}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z} \tag{12}$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} \tag{13}$$

Integrando (11) em relação a x, obtemos

$$\boxed{14} \qquad f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x. Então, diferenciando (14) em relação a y, temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

e, comparando com (12), vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, diferenciando em relação a z e comparando com (13), obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Conservação de Energia

Vamos aplicar as idéias deste capítulo para um campo de forças contínuo $\mathbf{F}$ que move um objeto ao longo de uma trajetória C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto terminal de C. Pela Segunda Lei do Movimento de Newton (veja a Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ em um ponto de C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$\begin{aligned}
W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt && \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)} \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt \\
&= \frac{m}{2} \left[|\mathbf{r}'(t)|^2 \right]_a^b && \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)} \\
&= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$W = \tfrac{1}{2}m\,|\,\mathbf{v}(b)\,|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\,\mathbf{v}(a)\,|^2 \tag{15}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}m\,|\,\mathbf{v}(t)\,|^2$, ou seja, metade da massa vezes o quadrado da rapidez, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto podemos reescrever a Equação 15 como

$$W = K(B) - K(A) \tag{16}$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nos pontos terminais de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, e temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} \\ &= -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] \\ &= P(A) - P(B) \end{aligned}$$

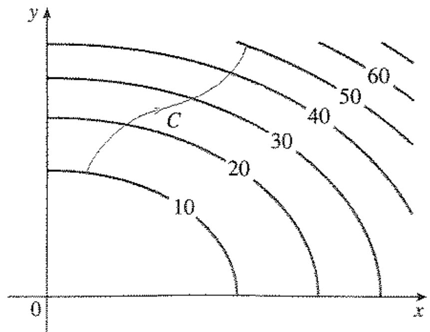
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$, $0 \leq t \leq 1$.

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 □ Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y)\,\mathbf{i} + (5x + 4y)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\,\mathbf{i} + (4xy - y^3)\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos y - y\cos x)\,\mathbf{i} + (-x^2\,\mathrm{sen}\,y - \mathrm{sen}\,x)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + 2xy + \ln x)\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$