

34. (a) Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial quadrado inverso, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

- (b) Um exemplo de um campo quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 da Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move

do afélio (em uma distância máxima em relação ao Sol de $1,52 \times 10^8$ km) ao periélio (em uma distância mínima

de $1,47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1,99 \times 10^{30}$ kg, e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

- (c) Outro exemplo de um campo quadrado inverso é o campo elétrico $\mathbf{E} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1,6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\varepsilon = 8,985 \times 10^{10}$.)

16.4 Teorema de Green

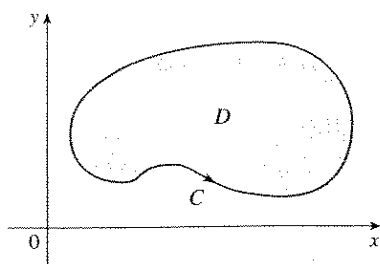


FIGURA 1

O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região D do plano cercada por C . (Veja a Figura 1. Admitiremos que D consiste em todos os pontos dentro de C além dos pontos sobre C .) Para enunciar o Teorema de Green usaremos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C se refere a percorrer C no sentido anti-horário apenas uma vez. Assim, se C for dado como uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está à esquerda quando o ponto $\mathbf{r}(t)$ percorrer C (veja a Figura 2).

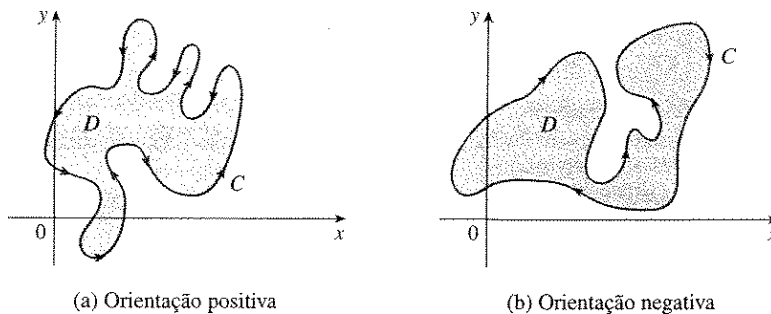


FIGURA 2

□ Recorde-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

NOTA □ A notação

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C^+ P dx + Q dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada C . Outra notação da orientação positiva da curva fronteira de

D é ∂D , assim a equação no Teorema de Green pode ser escrita como

$$\boxed{1} \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como a contrapartida do Teorema Fundamental do Cálculo para de integrais duplas. Compare a Equação 1 com o estabelecido pelo Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F' , $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos o lado direito envolve valores da função original (F , Q e P) somente sobre a *fronteira* da região. (No caso unidimensional, a região é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira é constituída apenas pelos dois pontos a e b .)

O Teorema de Green não é fácil de provar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma prova para o caso especial onde a região é tipo I ou tipo II (veja a Seção 15.3). A essas regiões, vamos chamar **regiões simples**.

Prova do Teorema de Green no Caso Onde D É uma Região Simples Note que o Teorema de Green estará provado se mostrarmos que

$$\boxed{2} \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\boxed{3} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Vamos provar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união de quatro curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos como parâmetro x e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Assim

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, e podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Portanto

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

□ O Teorema de Green recebeu esse nome em homenagem ao cientista inglês autodidata George Green (1793-1841), que trabalhava período integral na padaria do pai desde os 9 anos e aprendeu matemática em livros de biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, com 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) localizou uma cópia dos ensaios de Green, compreendeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu trabalho serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subseqüentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

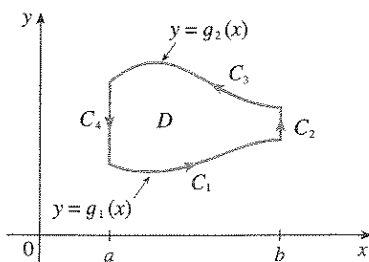


FIGURA 3

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante, e assim $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

A Equação 3 pode ser provada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 28). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green.

EXEMPLO 1 □ Calcule $\int_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar de essa integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, o que envolveria estabelecer três integrais separadas sobre os três lados do triângulo, vamos, em vez disso, usar o Teorema de Green. Note que a região D cercada por C é simples e C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned} \int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 □ Calcule $\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\sin x}) \right] dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr = 36\pi \end{aligned}$$

□ Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4 dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

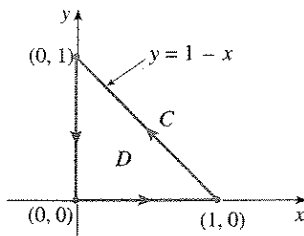


FIGURA 4

Nos Exemplos 1 e 2 consideramos que a integral dupla era mais facilmente calculada como uma integral de linha. (Tente escrever a integral de linha do Exemplo 2 e você ficará convencido rapidamente!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesse caso, usamos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo: se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , então o Teorema de Green nos dá

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy = 0$$

não interessando os valores das funções P e Q em D .

Outra aplicação da direção reversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1 dA$, desejamos escolher P e Q de modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Então, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

$$\boxed{5} \quad A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

EXEMPLO 3 □ Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt - (b \sin t)(-a \sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

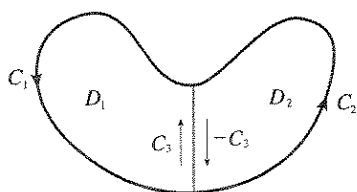


FIGURA 5

Apesar de termos provado o Teorema de Green somente no caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo: se D é uma região como mostrado na Figura 5, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$. Assim, aplicando o Teorema de Green para D_1 e D_2 separadamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ \int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy &= \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

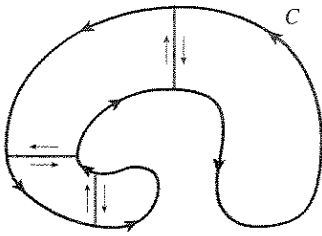


FIGURA 6

Se somarmos essas duas equações, a integral de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples (veja a Figura 6).

EXEMPLO 4 □ Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é a fronteira da região semi-anular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Note que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide-a em duas regiões simples (veja a Figura 7). Com coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto o Teorema de Green fornece

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (3xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\ &= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

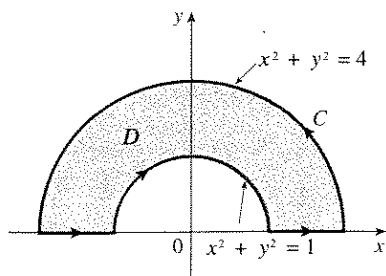


FIGURA 7

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 8 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 . Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região D esteja à esquerda quando percorrermos a curva C . Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa C_1 mas é horária na curva interna C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' pela introdução das retas mostradas na Figura 9 e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

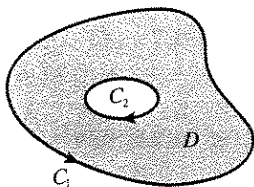


FIGURA 8

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy \end{aligned}$$

Como a integral de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

que é o Teorema de Green para a região D .

EXEMPLO 5 □ Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) / (x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado arbitrário contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Vamos então considerar um círculo,

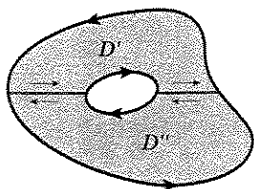


FIGURA 9

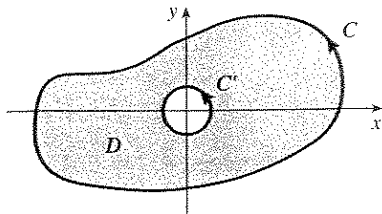


FIGURA 10

percorrido no sentido anti-horário C' com centro na origem e raio a , onde a é escolhido pequeno o suficiente para que C' esteja inteiramente contido em C (veja a Figura 10). Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva da fronteira é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy + \int_{-C'} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto
$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C'} P dx + Q dy$$

ou seja,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado que foi afirmado na seção anterior.

Esboço da Prova do Teorema 16.3.6 Estamos admitindo que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D , que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C , o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se intercepta em um ou mais pontos e pode ser quebrada em um certo número de curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de \mathbf{F} sobre essas curvas simples são todas 0, e somando essas integrais podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C . Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue-se então que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. □

16.4 Exercícios

1–4 □ Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C xy^2 dx + x^3 dy$,
 C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$

2. $\oint_C y dx - x dy$,
 C é o círculo com centro na origem e raio 1

3. $\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$

4. $\oint_C x dx + y dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ e na parábola $y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$

5–6 □ Verifique o Teorema de Green, usando um sistema algébrico computacional para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

5. $P(x, y) = x^4 y^5$, $Q(x, y) = -x^7 y^6$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$

6. $P(x, y) = y^2 \sin x$, $Q(x, y) = x^2 \sin y$,
 C é formado pelo arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$

7–12 □ Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

7. $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$,
 C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

8. $\int_C x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(0, 3)$

9. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$,
 C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

10. $\int_C xe^{-2x} dx + (x^4 + 2x^2 y^2) dy$,
 C é a fronteira da região entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

11. $\int_C y^3 dx - x^3 dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

12. $\int_C \sin y dx + x \cos y dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

13–16 □ Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$,
 C consiste no arco de curva $y = \sin x$ de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e do segmento de reta $(\pi, 0)$ a $(0, 0)$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \sin x \rangle$,
 C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(2, 6)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$

15. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2 y, e^y - xy^2 \rangle$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ orientada no sentido horário

16. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2 \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \rangle$, C é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ orientada no sentido anti-horário

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y) \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y .

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x até $(2, 0)$, e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19. Use uma das fórmulas em (5) para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada epicicloide, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use (5) para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_C x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) , mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

(c) Determine a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho simples fechado C no plano xy . Utilize o Teorema de Green para provar que as coordenadas do centróide (\bar{x}, \bar{y}) de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx$$

onde A é a área de D .

23. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

24. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide de uma região semicircular de raio a .

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C . Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \int_C y^3 dx \quad I_y = \frac{\rho}{3} \int_C x^3 dy$$