MAT2219

IQ- Prova 2 - 08/12/2023

Profa: Nataliia Goloshchapova
Monitor: Juan Cabrera Cuellar

Turma B

1ª Questão: (3.5 pontos)

a) (1.5 ponto) Encontre a massa do arame cujo formato é da curva $\gamma(t) = (t, -t, t^2)$, $t \in [0, 1]$ e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$.

b) (2.5 pontos) Determine se $\vec{F}$ é conservativo e encontre $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$\gamma(t) = \left(e^{(\sin t)^2}, \ln(1 + (\sin t)^4)\right)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$\vec{F} = (e^x \text{cos}y + y^2 \text{cos}x, -e^x \sin y + 2y \sin x)$.

Solução:

(a) Temos $\gamma(t) = (t, -t, t^2)$ com $0 \leq t \leq 1$ temos

$$\gamma'(t) = (1, -1, 2t) \quad \text{e} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2}.$$

assim, calculamos a integral

$$\int_0^1 \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{2 + 4t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{12} \left(2 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \left(\sqrt{6^3} - \sqrt{2^3}\right)$$
$$= \frac{1}{12} \left(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(b) Com $P(x, y) = e^x \text{cos}y + y^2 \text{cos}x$ e $Q(x, y) = -e^x \sin y + 2y \sin x$ temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y\text{cos}x \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y + 2y\text{cos}x.$$

Note que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ então temos que $\vec{F}$ é um campo conservativo. Para calcular a integral vamos achar φ a função potencial tais que $\nabla \varphi = \vec{F}$, isso é mesmo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^x \text{cos}y + y^2 \text{cos}x \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y \sin x$$

da equação $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ temos

$$\varphi(x, y) = \int_0^x \left(e^t \text{cos}y + y^2 \text{cos}t\right) \mathrm{d}t + f(y) = e^t \text{cos}y + y^2 \sin t \Big|_0^x f(y)$$
$$= e^x \text{cos}y + y^2 \sin x - \text{cos}y + f(y),$$

para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y \sin x + \text{sen}y + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por outro lado da segunda equação temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y \sin x + \text{sen} y + \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y \sin x.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\text{sen} y \quad \Rightarrow \quad f(y) = \text{cos} y + c,$$

com c uma constante. Então temos que função potencial é

$$\varphi(x, y) = e^x \text{cos} y + y^2 \sin x.$$

Agora, a partir de $\gamma(t)$ temos $\gamma(0) = (1, 0)$ e $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (e, \ln(2))$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\gamma(0)}^{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} \nabla\varphi\, \mathrm{d}\vec{r} = f(x, y)\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} &= f(e, \ln(2)) - f(1, 0) \\ = e^e \text{cos}(\ln(2)) + (\ln(2))^2 \sin(e) - e\,.\end{aligned}$$

2ª Questão: (3 pontos) Encontre $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + 2y,\ \frac{x}{x^2+y^2} + x\right)$, e γ é o retângulo de vértices $(-2,-2), (2,-2), (2,2), (-2,2)$ orientado no sentido anti-horário.

Dica: Observe que $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, onde $\vec{F}_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\vec{F}_2 = (2y, x)$, então $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$. Lembre o analise para o campo $\vec{F}_1$ feito na aula.

Solução: Usando o analise feito na aula para $\vec{F}_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ temos que,

$$\int_\gamma \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi.$$

Ou seja, devemos aplicar o Teorema de Green com região limitada por γ e uma circunferência pequena envolvendo $(0,0)$.

Agora, vamos calcular $\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Aplicando o Teorema de Green com $int(\gamma)$ e observando que $\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} = -1$, obtemos

$$\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{int(\gamma)} -1 dxdy = -16$$

Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi - 16.$$

Turma B

3ª Questão: (2,5 pontos) Encontre $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$, onde $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (y+x)\vec{j} + z^2\vec{k}$, onde S é a parte do cilindro $x^2+y^2=1$ tal que $-2 \leq z \leq 2$ incluindo as tampas com normal exterior.

Solução: Usando o Teorema de Gauss, e passando para as coordenadas cilíndricas obtemos

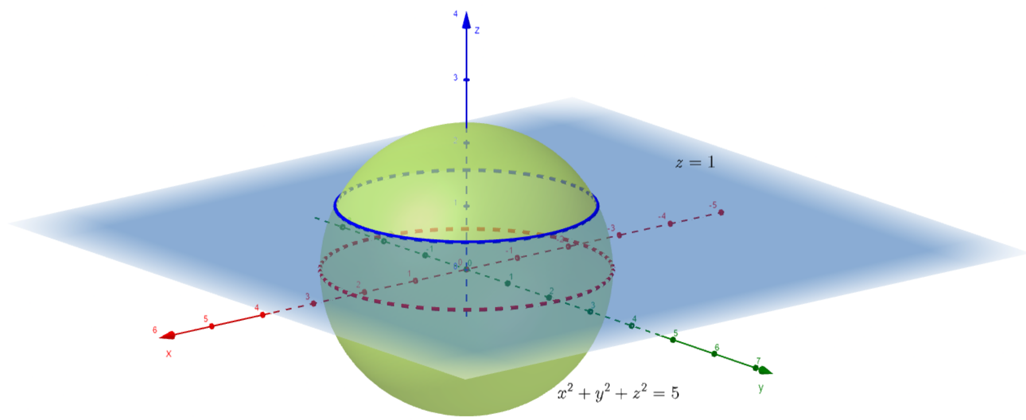
$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_{int(S)} div(\vec{F})dxdydz = \iiint\limits_{int(S)} (2+2z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_{-2}^{2}(2+2z)rdzdrd\theta = 8\pi.$$

Turma B

4ª Questão: (2,5 pontos) Use o teorema de Stokes para encontrar $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (y^2+\ln(1+x^2))\vec{i}+(x+\cos y)\vec{j}+(ye^z+x\cos z)\vec{k}$, e γ é a curva de intersecção de $x^2+y^2+z^2=5$ com $z=1$ cuja projeção ao plano xy tem orientação anti-horária.

Dica: pense primeiro qual é o vetor normal para a superfície $z=1$.

Solução: Consideremos o seguinte gráfico para a superfície em questão



Seguindo a dica, vejamos qual é o vetor normal para a superfície $z=1$, temos

$$\mathrm{X}(x,y) = (x,y,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\wedge\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + \vec{k} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{k}.$$

Agora, vamos calcular o rotacional do campo $\vec{F}$,

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y2+\ln(1+x^2) & x+\cos y & y\,e^z + x\cos z \end{vmatrix} = e^z\,\vec{i} - \cos z\,\vec{j} + (1-2y)\,\vec{k}.$$

Logo,

$$\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n} = (1-2y).$$

Assim,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (1-2\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 4\pi.$$