MAT2219
IQ- Prova 2 - 08/12/2023

Profa: Nataliia Goloshchapova
Monitor: Juan Cabrera Cuellar

Turma A

1ª Questão: (3.5 pontos)

a) (1.5 ponto) Encontre a massa do arame cujo formato é da curva $\gamma(t) = (1, t, t^3)$, $t \in [0, 1]$ e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = y^3$.

b) (2.5 pontos) Determine se $\vec{F}$ é conservativo e encontre $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$\gamma(t) = \left(e^{(\sin t)^3}, \ln(1 + (\text{cos}t)^5)\right)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$\vec{F} = (-e^y \sin x + 2x \sin y,\, e^y \text{cos}x + x^2 \text{cos}y)$.

Solução:

(a) Temos $\gamma(t) = (1, t, t^3)$ com $0 \le t \le 1$ temos

$$\gamma'(t) = (0, 1, 3t^2) \quad \text{e} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 9t^4}.$$

assim, calculamos a integral

$$\int_0^1 \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{54} \left(1 + 9t^4\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} \left(\sqrt{10^3} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{54} \left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

(b) Com $P(x, y) = -e^y \sin x + 2x \sin y$ e $Q(x, y) = e^y \text{cos}x + x^2 \text{cos}y$ temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^y \sin x + 2x\text{cos}y \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^y \sin x + 2x\text{cos}y\,.$$

Note que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ então temos que $\vec{F}$ é um campo conservativo. Para calcular a integral vamos achar φ a função potencial tais que $\nabla \varphi = \vec{F}$, isso é mesmo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e^y \sin x + 2x \sin y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^y \text{cos}x + x^2 \text{cos}y$$

da equação $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ temos

$$\varphi(x, y) = \int_0^x (-e^y \sin t + 2t \sin y) \, \mathrm{d}t + f(y) = e^y \text{cos}t + t^2 \sin y \Big|_0^x f(y)$$
$$= e^y \text{cos}x + x^2 \sin y - e^y + f(y),$$

para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^y \text{cos}x + x^2 \text{cos}y - e^y + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por outro lado da segunda equação temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^y \text{cos} x + x^2 \text{cos} y - e^y + \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \text{cos} x + x^2 \text{cos} y.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \quad \Rightarrow \quad f(y) = e^y + c,$$

com c uma constante. Então temos que função potencial é

$$\varphi(x, y) = e^y \text{cos} x + x^2 \sin y.$$

Agora, a partir de $\gamma(t)$ temos $\gamma(0) = (1, \ln(2))$ e $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (e, 0)$. Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\gamma(0)}^{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} \nabla\varphi\, \mathrm{d}\vec{r} = f(x, y)\Bigg|_{\gamma(0)}^{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} = f(e, 0) - f(1, \ln(2)) = \cos(e) - 2 - \sin(\ln(2))\,.$$

Turma A

$2^{\underline{a}}$ Questão: (3 pontos) Encontre $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + y,\ \frac{x}{x^2+y^2} + 2x\right)$, e γ é o retângulo de vértices $(-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)$ orientado no sentido anti-horário.

Dica: Observe que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, onde $\vec{F_1} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\vec{F_2} = (y, 2x)$, então $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$. Lembre o analise para o campo $\vec{F_1}$ feito na aula.

Solução: Usando o analise feito na aula para $\vec{F_1} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ temos que,

$$\int_\gamma \vec{F_1}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi.$$

Ou seja, devemos aplicar o Teorema de Green com região limitada por γ e uma circunferência pequena envolvendo $(0,0)$.

Agora, vamos calcular $\int_\gamma \vec{F_2}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Aplicando o Teorema de Green com $int(\gamma)$ e observando que $\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} = 1$, obtemos

$$\int_\gamma \vec{F_2}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{int(\gamma)} 1 dxdy = 4$$

Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi + 4.$$

Turma A

3ª Questão: (2,5 pontos)

Encontre $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$, onde S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ tal que $-1 \leq z \leq 1$ incluindo as tampas com normal exterior.

Solução: Usando o Teorema de Gauss, e passando para as coordenadas cilíndricas obtemos

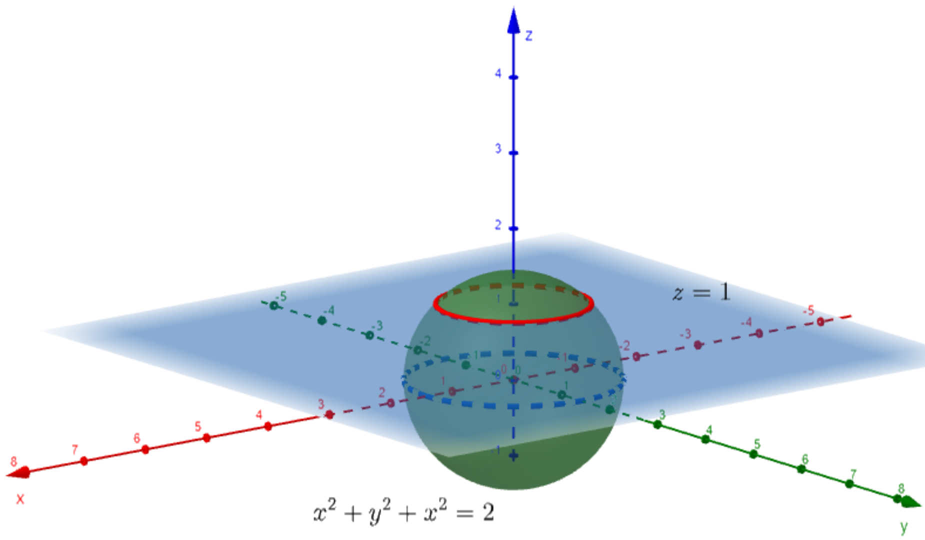
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{int(S)} div(\vec{F}) dxdydz = \iiint_{int(S)} (2+2z) dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 (2+2z) r dz dr d\theta = 4\pi.$$

Turma A

4ª Questão: (2,5 pontos) Use o teorema de Stokes para encontrar $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (y+\cos x)\vec{i}+(x^2+\ln(1+y^2))\vec{j}+(xe^z+y\cos z)\vec{k}$, e γ é a curva de intersecção de $x^2+y^2+z^2=2$ com $z=1$ cuja projeção ao plano xy tem orientação anti-horária.

Dica: pense primeiro qual é o vetor normal para a superfície $z=1$.

Solução: Consideremos o seguinte gráfico para a superfície em questão



Seguindo a dica, vejamos qual é o vetor normal para a superfície $z=1$, temos

$$\mathrm{X}(x,y) = (x,y,1) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\wedge\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 0\,\vec{j} + \vec{k} = \vec{k} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \vec{k}.$$

Agora, vamos calcular o rotacional do campo $\vec{F}$,

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+\cos x & x^2+\ln(1+y^2) & x\,e^z + y\cos z \end{vmatrix} = \cos z\,\vec{i} - e^z\,\vec{j} + (2x-1)\,\vec{k}.$$

Logo,

$$\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n} = (2x-1).$$

Assim,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho\cos\theta - 1)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = -\pi$$