**MAT2219**
**IQ- Gabarito Prova 1 - Turma B**
**19/09/2023**

**Profa: Nataliia Goloshchapova**
**Monitor: Juan Cabrera Cuellar**

Turma B

**1ª Questão:** (3 pontos)

a) (1.5 ponto) Inverte a ordem da integração na integral iterada:

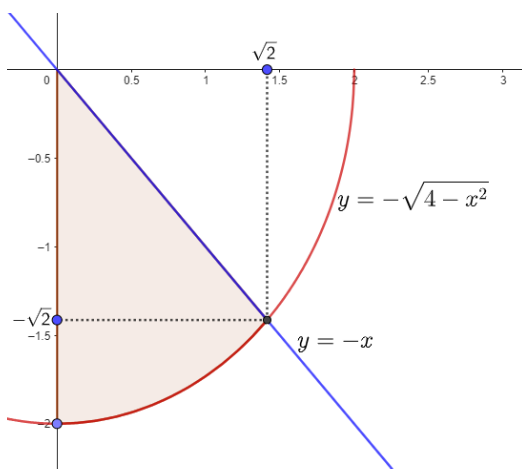
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x} f(x,y)\,dydx.$$

b) (1.5 ponto) Calcule a integral invertendo a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dydx.$$

**Solução:**

(*a*) Note que região de integração é $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{2},\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le -x\right\}$. Isto significa que $x$ está variando no intervalo $[0,\sqrt{2}]$ e para $x$ fixo nesse intervalo o $y$ varia entre $-\sqrt{4-x^2}$ e $-x$. Ou seja, a região $D$ está compreendida entre os gráficos das funções $y = -\sqrt{4-x^2}$ e $y = -x$ com $0 \le x \le \sqrt{2}$, como segue




Vamos achar o ponto de intersecção da região circular. Com $y = -\sqrt{4-x^2}$ e $y = -x$, temos que

$$-x = -\sqrt{4-x^2} \Longrightarrow x = \sqrt{2} \Longrightarrow y = -\sqrt{2}.$$

Daí, note que a região de integração $D$ pode ser dividida em duas regiões $D_1$ e $D_2$ onde

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid -2 \le y \le -\sqrt{2},\ 0 \le x \le -\sqrt{4-y^2}\right\}$$

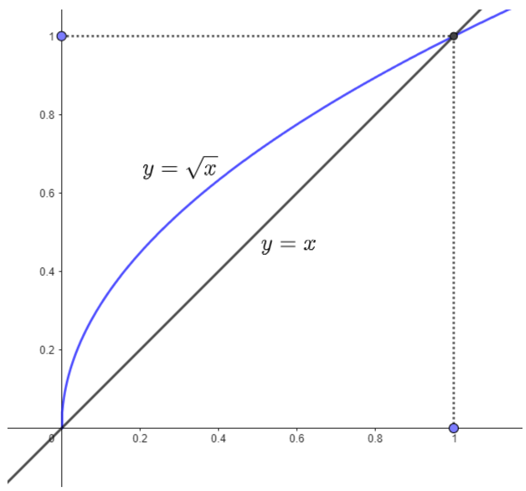
e

$$D_2 = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{2} \le y \le 0,\ 0 \le x \le -y\right\}.$$

Assim temos,

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-\sqrt{2}}^{0} \int_{0}^{-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$(b)$ Note que $x$ está variando no intervalo $[0,1]$ e para $x$ fixo nesse intervalo o $y$ varia entre $x$ e $\sqrt{x}$. Ou seja, a região $D$ está compreendida entre os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x$ com $0 \le x \le 1$, como segue




Daí, note que a região de integração $D$ pode ser definida do seguinte jeito,

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y\right\}.$$

Entao,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\frac{\sin y}{y}\,\bigg|_{y^2}^{y} \mathrm{d}y = \int_0^1 (y-y^2)\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \sin y\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\,\sin y\,\mathrm{d}y \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Obs.1}}}{=} \left[-\cos y - (-y\cos y + \sin y)\right]_0^1 \\
&= (-\cos 1 + \cos 1 - \sin 1 - (-\cos 0 - (0)\cos 0 - \sin 0) \\
&= 1 - \sin 1.
\end{aligned}$$

**Obs.1:** Para resolver a integral $\int y\,\sin y\,\mathrm{d}y$ usaremos a tecnica de integração por partes com $u = y$ temos $\mathrm{d}u = \mathrm{d}y$ e com $\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$ temos $v = -\cos y$. Assim,

$$\int y\,\sin y\,\mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y\,\mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y + C.$$

Turma B

**2ª Questão:** (3 pontos)

a) (1.5 ponto) Ache a integral $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, onde $D$ é a região limitada pelas curvas $x^2+y^2=1$, $x=y$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}y$.

b) (1.5 ponto) Ache a integral $\iint\limits_D (x-y)(x+y)e^{(x+y)^2}dxdy$, onde

$$D=\{(x,y):\ 1\le x-y\le 2,\ -1\le x+y\le 1\}.$$

**Solução:**

$(a)$ Primeiro vamos a determinar a região de integração $D$ graficando as curvas $x^2+y^2=1$, $x=y$ e $x=\frac{1}{\sqrt{3}}y$

Vamos achar os pontos de intersecção da região circular. Com $y=\sqrt{1-x^2}$ e $y=x$, temos que

$$x=\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por outro lado, com $y=\sqrt{1-x^2}$ e $y=\sqrt{3}x$, temos

$$\sqrt{3}x=\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow x=\frac{1}{2}\Longrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Isto é necessário pois vamos resolver a integral mediante a mudança de variável. Note que, temos $0\le r\le 1$ e $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ onde

$$\cos\theta_1=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\theta_1=\frac{\pi}{4}\quad\text{e}\quad\cos\theta_2=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta_2=\frac{\pi}{3}.$$

Assim, $D_{\theta,r}=\left\{(\theta,r)\mid 0\le r\le 1\,,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\}$. Agora, por outro lado, com $x=r\cos\theta$ e $y=r\sin\theta$ temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=-r\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r,$$

e

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(x^2+y^2)}=\sqrt{1-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)}=\sqrt{1-r^2}.$$

Então,

$$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{\theta,r}}r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\mathrm{d}\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\cdot\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{36}.$$

$(b)$ Façamos a mudança de variável com $u = x - y$ e $v = x + y$. Temos

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Agora, calculando o Jacobiano temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y)(x+y)e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{1}{2}u\,v\,e^{v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{1}^{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}u\,v\,e^{v^2}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{1}^{2} \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}e^{u^2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\mathrm{d}u = \int_{1}^{2}\left(e^1 - e^1\right)\frac{1}{4}u\,\mathrm{d}u \\
&= 0
\end{aligned}$$

Turma B

**3ª Questão:** (4 pontos)

a) (2 pontos) Encontre a massa do solido

$$S = \{(x, y, z) : 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

com a densidade $\delta(x, y, z) = y$ usando as coordenadas cilíndricas.

b) (2 pontos) Ache $\iiint\limits_D z\, dxdydz$, onde

$$D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0\}.$$

**Solução:**

$(a)$ Note que, a partir de $x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$ temos que $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$. Assim

$$S = \left\{(x, y, z) \mid 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2},\ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Vamos usar coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \implies \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

Além disso,

$$1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2 \quad \text{e} \quad 2 + x^2 + y^2 = 2 + r^2.$$

Logo,

$$S_{r,\theta,z} = \left\{(r, \theta, z) \mid 1 - r^2 \leq z \leq 2 + r^2,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 1\right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{D_{r,\theta,z}} r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^\pi \int_0^1 \int_{1-r^2}^{2+r^2} r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \int_0^1 z\, r^2 \sin\theta \Big|_{1-r^2}^{2+r^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 \left(2 + r^2 - 1 + r^2\right)\left(r^2 \sin\theta\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \left(r^2 + 2r^4\right) \sin\theta\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1}{3}r^3 + \frac{2}{5}r^4\right) \sin\theta \Big|_0^1 \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \sin\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{11}{15} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{11}{15} \cos\theta \Big|_0^\pi = \frac{22}{15}.
\end{aligned}$$

$(b)$ Passando a coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = r\ \sin\alpha\cos\theta \\ y = r\ \sin\alpha\ \sin\theta \\ z = r\cos\alpha \end{cases} \implies \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \alpha)} = \begin{vmatrix} -r\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\cos\theta & r\cos\alpha\cos\theta \\ r\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\ \sin\theta & r\cos\alpha\ \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -r\ \sin\alpha \end{vmatrix} = r^2 \sin\alpha.$$

Note que, como $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$ temos que a região de integração está no oitavo octante. Então, $1 \leq r \leq \sqrt{2}$, com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ temos $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ e por ultimo com $z \leq 0$ tem-se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Assim,

$$D_{r,\theta,\alpha} = \left\{ (r, \theta, \alpha) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{D} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{D_{r,\theta,\alpha}} r\cos\alpha \left(r^2 \sin\alpha\right) \, \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^3 \cos\alpha \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r^3 \left.\frac{\sin^2\alpha}{2}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{2} \left( (\sin\pi)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} -\frac{r^3}{2} \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\left.\frac{r^4}{8}\right|_{1}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\theta = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\frac{1}{8} \left( \left(\sqrt{2}\right)^4 - 1 \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\frac{1}{8} (4-1) \, \mathrm{d}\theta = -\frac{3}{8} \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \mathrm{d}\theta = -\frac{3}{8} \left( 2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) \\
&= -\frac{3}{16}\pi.
\end{aligned}$$