

MAT2219
IQ- Gabarito Prova 1 - Turma A
19/09/2023

Profa: Nataliia Goloshchapova
Monitor: Juan Cabrera Cuellar

Turma A

1ª Questão: (3 pontos)

a) (1.5 ponto) Inverte a ordem da integração na integral iterada:

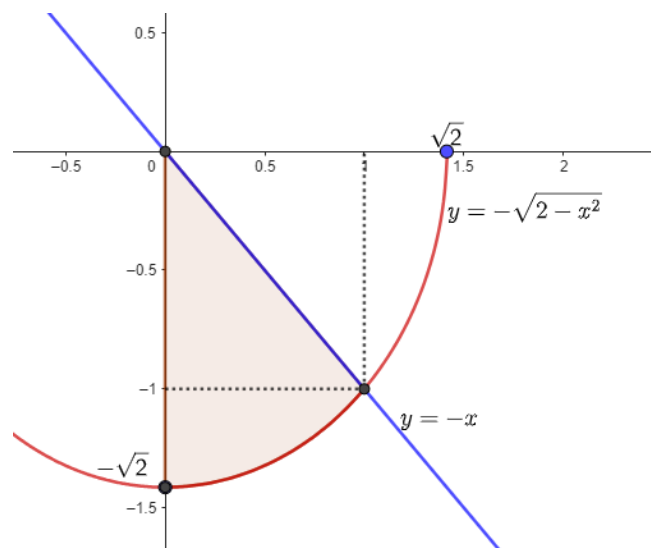
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x} f(x, y) dy dx.$$

b) (1.5 ponto) Calcule integral invertendo a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy dx.$$

Solução:

(a) Note que região de integração é $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq -x\}$. Isto significa que x está variando no intervalo $[0, 1]$ e para x fixo nesse intervalo o y varia entre $-\sqrt{2-x^2}$ e $-x$. Ou seja, a região D está compreendida entre os gráficos das funções $y = -\sqrt{2-x^2}$ e $y = -x$ com $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, como segue



Vamos achar o ponto de intersecção da região circular. Com $y = -\sqrt{2-x^2}$ e $y = -x$, temos que

$$-x = -\sqrt{2-x^2} \implies x = 1 \implies y = -1.$$

Daí, note que a região de integração D pode ser dividida em duas regiões D_1 e D_2 onde

$$D_1 = \{(x, y) \mid -\sqrt{2} \leq y \leq -1, 0 \leq x \leq -\sqrt{2-y^2}\}$$

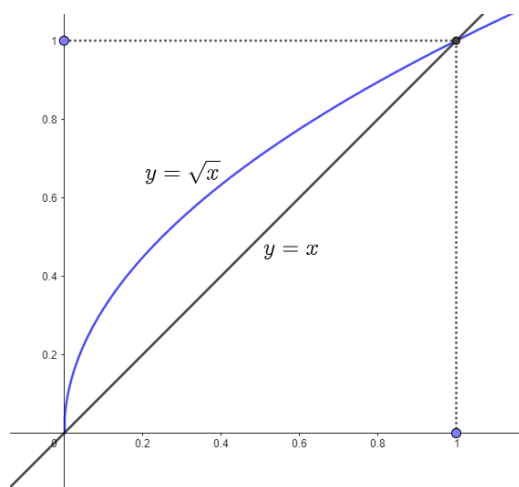
e

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq -y\}.$$

Assim temos,

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x} f(x, y) dy dx = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \int_0^0 f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_0^{-y} f(x, y) dx dy.$$

- (b) Note que x está variando no intervalo $[0, 1]$ e para x fixo nesse intervalo o y varia entre x e \sqrt{x} . Ou seja, a região D está compreendida entre os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x$ com $0 \leq x \leq 1$, como segue



Daí, note que a região de integração D pode ser definida do seguinte jeito,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}.$$

Entao,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy dx &= \int_0^1 \int_{y^2}^y \frac{\cos y}{y} dx dy = \int_0^1 x \frac{\cos y}{y} \Big|_{y^2}^y dy = \int_0^1 (y - y^2) \frac{\cos y}{y} dy \\ &= \int_0^1 \cos y dy - \int_0^1 y \cos y dy \stackrel{\text{Obs.1}}{=} [\sin y - (y \sin y + \cos y)]_0^1 \\ &= (\sin 1 - \sin 1 - \cos 1 - (\sin 0 - (0) \sin 0 - \cos 0)) \\ &= 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

Obs.1: Para resolver a integral $\int y \cos y dy$ usaremos a tecnica de integração por partes com $u = y$ temos $du = dy$ e com $dv = \cos y dy$ temos $v = \sin y$. Assim,

$$\int y \cos y dy = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y + C.$$

2ª Questão: (3 pontos)

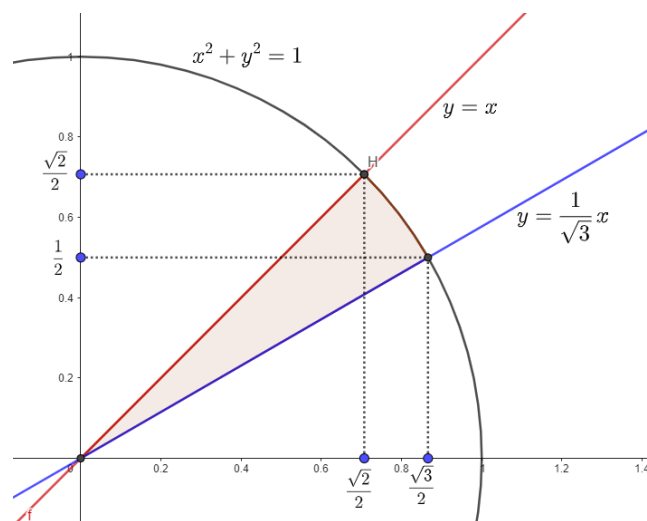
a) (1.5 ponto) Ache a integral $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x = y$, $x = \sqrt{3}y$.

b) (1.5 ponto) Ache a integral $\iint_D (x+y)(x-y)e^{(x-y)^2}$, onde

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x - y \leq 2, -1 \leq x + y \leq 1\}.$$

Solução:

(a) Primeiro vamos a determinar a região de integração D graficando as curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x = y$ e $x = \sqrt{3}y$



Vamos achar os pontos de intersecção da região circular. Com $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = x$, temos que

$$x = \sqrt{1-x^2} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por outro lado, com $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x = \sqrt{1-x^2} \implies x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies y = \frac{1}{2}.$$

Isto é necessário pois vamos resolver a integral mediante a mudança de variável. Note que, temos $0 \leq r \leq 1$ e $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ onde

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \cos\theta_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Assim, $D_{\theta,r} = \{(\theta, r) \mid 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$. Agora, por outro lado, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ temos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = -r \implies \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r,$$

e

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(x^2+y^2)} = \sqrt{1-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)} = \sqrt{1-r^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy &= \iint_{D_{\theta,r}} r\sqrt{1-r^2} \, dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \, d\theta = \frac{1}{3} \cdot \theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

(b) Façamos a mudança de variável com $u = x - y$ e $v = x + y$. Temos

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Agora, calculando o Jacobiano temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \implies dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = \frac{1}{2} du dv.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)(x-y)e^{(x-y)^2} \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \frac{1}{2} u v e^{u^2} \, du dv = \int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} u v e^{u^2} \, dv du \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} u e^{u^2} \right) v^2 \Big|_{-1}^1 \, du = \int_1^2 (1-1) \frac{1}{2} u e^{u^2} \, du \\ &= 0 \end{aligned}$$

3ª Questão: (4 pontos)

a) (2 pontos) Encontre a massa do sólido

$$S = \{(x, y, z) : 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

com a densidade $\delta(x, y, z) = x$ usando as coordenadas cilíndricas.

b) (2 pontos) Ache $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$, onde

$$D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0\}.$$

Solução:

(a) Note que, a partir de $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x \geq 0$ temos que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$. Assim

$$S = \{(x, y, z) \mid 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Vamos usar coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \implies \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

Além disso,

$$1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2 \quad \text{e} \quad 2 + x^2 + y^2 = 2 + r^2.$$

Logo,

$$S_{r, \theta, z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 - r^2 \leq z \leq 2 + r^2, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{r, \theta, z}} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{1-r^2}^{2+r^2} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z r^2 \cos \theta \Big|_{1-r^2}^{2+r^2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2 + r^2 - 1 + r^2) (r^2 \cos \theta) \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 + 2r^4) \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} r^3 + \frac{2}{5} r^5 \right) \cos \theta \Big|_0^1 \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \cos \theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{11}{15} \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{11}{15} \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

(b) Passando a coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = r \sin \alpha \cos \theta \\ y = r \sin \alpha \sin \theta \\ z = r \cos \alpha \end{cases} \implies \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \alpha)} = \begin{vmatrix} -r \sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \cos \theta & r \cos \alpha \cos \theta \\ r \sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta & r \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -r \sin \alpha \end{vmatrix} = r^2 \sin \alpha.$$

Note que, como $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 0$ temos que a região de integração está no sexto octante. Então, $1 \leq r \leq \sqrt{3}$, com $x \leq 0$ e $y \geq 0$ temos $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ e por ultimo com $z \leq 0$ tem-se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Assim,

$$D_{r,\theta,\alpha} = \left\{ (r, \theta, \alpha) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{3}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{r,\theta,\alpha}} r \cos \alpha (r^2 \sin \alpha) \, d\alpha \, dr \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^3 \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^{\sqrt{3}} r^3 \frac{\sin^2 \alpha}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \, dr \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{2} \left((\sin \pi)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} -\frac{r^3}{2} \, dr \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{r^4}{8} \Big|_1^{\sqrt{3}} \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{1}{8} \left((\sqrt{3})^4 - 1 \right) \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{1}{8} (9 - 1) \, d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$