Lista 5 com respostas

Nataliia Goloshchapova

MAT0105 - 1° semestre de 2023

Exercício 1.
Tome $x'y'$ o sistema de eixos do plano que é a translação do sistema xy para a nova oritem $O' = (1, 1)$, i.e., $x' = x - 1$ e $y' = y - 1$.

(a) Dado o ponto $P = (1, 4)$ no sistema xy, encontre as coordenadas de P no sistema $x'y'$.

(b) Dado o ponto $A = (2, 1)$ no sistema $x'y'$, encontre as coordenadas de A no sistema xy.

(c) Dada a equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$, encontre tal equação nas variáveis $x'y'$.

Solução 1.

(a) $P = (1, 4)_{xy} = (0, 3)_{x'y'}$;

(b) $A = (2, 1)_{x'y'} = (3, 2)_{xy}$;

(c) $x'^2 - 2x' + y'^2 - 4y' = 20$.

Exercício 2.
Dados dois sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. Escreva as equações paramétricas da reta $r : [X = (0, 2, 0) + s(1, 2, 3)]_{\Sigma_1}$ no sistema Σ_2 sendo Σ_2:

(a) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1, \vec{f}_3 = \vec{e}_2$ e $O_2 = (1, 2, 3)_{\Sigma_1}$;

(b) $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1, \vec{f}_2 = -\vec{e}_3 - \vec{e}_1, \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $O_2 = (1, 0, 1)_{\Sigma_1}$.

Solução 2.

Dica: Calcule M_{EF} e use a equação apresentada em aula

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = (O_2)_{\Sigma_1} + M_{EF} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\Sigma_2}$$

(a) $[r : (3, 0, -4) + s(-3, 2, 4)]_{\Sigma_2}$

(b) $[r : (-2, 3, 2) + s(0, -1, 2)]_{\Sigma_2}$

Exercício 3.

Dado o plano $(2x - 4y + z = 4)_{\Sigma_1}$. Escreva as equações paramétricas desse plano nos sistema Σ_2 do exercício 2.

Solução 3.

Referente ao sistema em (a) $[2x' + y' - 4z' - 7 = 0]_{\Sigma_2}$
Referente ao sistema em (b) $[-2x' - 3y' - 3z' - 1 = 0]_{\Sigma_2}$

Exercício 4.

$\Sigma_1 = (O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ são dois sistemas de coordenadas tais que $O_2 = (1, 1, 1)_{\Sigma_1}$ e a matriz de mudança de base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ para base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtenha, em relação ao sistema Σ_1, equações vetoriais dos eixos coordenados O_2x', O_2y' e O_2z', e equações gerais dos planos coordenados $O_2x'y'$, $O_2x'z'$ e $O_2y'z'$ do sistema Σ_2.

Solução 4.

$O_2x' : X = (0, 0, 1) + t(1, 1, 0)$
$O_2y' : X = (1, 0, 1) + t(0, 1, 0)$
$O_2z' : X = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$
$O_2x'y' : z - 1 = 0$
$O_2x'z' : -x + y - z + 1 = 0$
$O_2y'z' : x - 1 = 0$

Exercício 5.
Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ obtendo um novo sistema $\bar{x}\bar{y}$. Seja P um ponto do plano.

(a) Se $P = (2, 2)$ no sistema xy e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema $\bar{x}\bar{y}$.

(b) Se $P = (2, 2)$ no sistema $\bar{x}\bar{y}$ e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema xy.

(c) Ache a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no sistema $\bar{x}\bar{y}$.

Solução 5.

(a) $P = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})_{\bar{x}\bar{y}}$

(b) $P = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})_{xy}$

(c) $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$

Exercício 6.
Dado um sistema de coordenadas cartesiano, escreva a equação e esboce o gráfico:

(a) da elipse de focos $(\pm 5, 0)$ e dois vértices $(\pm 13, 0)$;

(b) da elipse de focos $(0, \pm 6)$ e eixo maior medindo 34;

(c) da elipse de vértices $(\pm 5, 0)$ e excentricidade $e = \frac{3}{5}$;

(d) da hipérbole de vértices $(\pm 2, 0)$ e focos $(\pm 3, 0)$;

(e) da hipérbole de vértices $(\pm 15, 0)$ e assíntotas $5y = \pm 4x$;

(f) da hipérbole de assíntotas $y = \pm x$ passando pelo ponto $(5, 9)$;

(g) da parábola com vértice na origem e foco $(8, 0)$;

(h) da parábola com vértice na origem e diretriz $y = 2$;

(i) da parábola com vértice na origem, eixo de simetria Ox, passando pelo ponto $(5, 10)$.

Solução 6.

(a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

(b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

(e) $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$

(f) $\frac{y^2}{56} - \frac{x^2}{56} = 1$

(g) $y^2 = 32x$

(h) $x^2 = -8y$

(i) $y^2 = 20x$

Exercício 7.
Identifique as cônicas e faça desenho:

(a) $9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 10$;

(b) $4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$;

(c) $4y^2 - 4y - 24x + 9 = 0$;

(d) $36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y + 14 = 0$;

(e) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 68 = 0$;

(f) $9y^2 - 9x^2 + 6x = 1$.

Solução 7.

(a) Círculo ($(x-1)^2 + (y-1/3)^2 = 172/9$);

(b) Elipse ($\frac{(x-1/2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$);

(c) Parábola ($(y-1/2)^2 = 6x - 2$);

(d) Vazio ($(x-1/3)^2 + (y-1/2)^2 = -1/36$);

(e) Hipérbole ($\frac{(x-1)^2}{36/71} - \frac{(y-1/3)^2}{36/71} = 1$);

(f) Par de retas ($y = \pm(x-1/3)$).