Lista 4 com respostas

Nataliia Goloshchapova

MAT0105 - 1° semestre de 2023

Exercício 1.
Estude a posição relativa das retas r_1 e r_2.

(a) $r_1 : X = (1, -1, 1) + t(-2, 1, -1)$, $r_2 : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

(b) $r_1 : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) $r_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$, $r_2 : X = (0, 0, 0) + t(1, 2, 0)$

(d) $r_1 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$, $r_2 : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$

(e) $r_1 : X = (8, 1, 9) + t(2, -1, 3)$, $r_2 : X = (3, -4, 4) + t(1, -2, 2)$

Solução 1.

(a) Paralelas distintas.

(b) Concorrentes.

(c) Reversas.

(d) Coincidentes ($r = s$).

(e) Concorrentes em $P = (-2, 6, -6)$.

Exercício 2.

Dadas as retas $r_1 : X = (0, 1, 0) + t(1, 0, 0)$ e $r_2 : X = (-1, 2, 7) + t(2, 1, -3)$, obtenha uma equação vetorial da reta r_3, concorrente com r_1 e r_2, e paralela a $\vec{u} = (1, -5, -1)$.

Solução 2.

Sejam $P = (t_P, 1, 0) \in r_1$ e $Q = (-1+2t_Q, 2+t_Q, 7-3t_Q) \in r_2$. Logo $\vec{PQ}$ é um vetor diretor de uma reta concorrente a r_1 e r_2, como está sendo procurada a reta paralela a $\vec{u}$, tem-se que $\vec{PQ}||\vec{u}$, i.e. $\vec{PQ} = \alpha\vec{u}$. Basta resolver o sistema em três variáveis $\vec{PQ} = (-1+2t_Q, 2+t_Q, 7-3t_Q) - (t_P, 1, 0) = \lambda\vec{u} = \lambda(1, -5, -1)$.

Exercício 3.

Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de interseção P.

(a) $r : X = (1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$, $\pi : x - y - z = 2$

(b) $r : \frac{x-1}{2} = y = z$, $\pi : X = (3, 0, 1) + t(0, -1, 1) + s(2, 2, 0)$

(c) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $\pi : X = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}) + t(1, -\frac{1}{2}, 0) + s(0, 1, 1)$

(d) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\pi : x + y = 2$

(e) $r : X = (0, 0, 0) + t(1, 4, 1)$, $\pi : X = (1, -1, 1) + t(0, 1, 2) + s(1, -1, 0)$

(f) $r : \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$, $\pi : 3x - 6y - z = 0$

Solução 3.

(a) São transversais, $P = (1, 0, -1)$.

(b) São paralelas.

(c) r está condita em π.

(d) São paralelas.

(e) São transversais, $P = (-1/9, -4/9, -1/9)$.

(f) São paralelas.

Exercício 4.
Verifique se a reta

$$\frac{1}{3}(x-7) = -(y+3) = z-4$$

intersecciona os planos $\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4$ e $\pi_2 : x - 5y + 2z = 12$ no mesmo ponto. Verifique se essa reta é coplanar com a reta determinada pela interseção desses planos.

Solução 4.
A intersecção da reta com π_1 é em $(-15, \frac{13}{3}, -\frac{10}{3})$. A intersecção da reta com π_2 é em $(2, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$. A reta de intersecção dos planos é $X = (2, -2, 0) + t(1, 1, 2)$. Para a segunda parte use o critério de coplanaridade.

Exercício 5.
Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2.

(a) $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + t(0, 1, 1) + s(-1, 2, 1)$,
$\pi_2 : X = (1, 0, 0) + t(1, -1, 0) + s(-1, -1, -2)$

(b) $\pi_1 : X = (4, 2, 4) + t(1, 1, 2) + s(3, 3, 1)$,
$\pi_2 : X = (3, 0, 0) + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 4)$

(c) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$

(d) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$, $\pi_2 : X = (0, 0, 1) + t(1, 0, 3) + s(-1, 1, 1)$

Solução 5.

(a) São iguais.

(b) São transversais.

(c) São paralelos distintos.

(d) São transversais.

Exercício 6.
Considere os planos $\pi_1 : x - y + z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2m^2x - (m+1)y + 2z = 0$.

(a) Determine o cada valor de m para que os planos π_1 e π_2 sejam: paralelos, concorrentes e concorrentes ortogonais.

(b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta de intersecção entre π_1 e π_2.

Solução 6.

(a) $m = 1$ para que π_1 e π_2 sejam paralelos;
$m \neq 1$ para que π_1 e π_2 sejam concorrentes;
$\nexists m \in \mathbb{R}$ (i.e. não existe m número real) para que π_1 e π_2 sejam ortogonais.

(b) $X = (0, -3, 0) + t(1, 0, -1)$.

Exercício 7.
Obtenha equações da reta r_1 que contém o ponto $P = (1, 1, 1)$, e é concorrente com $r_2 : x = 2y = 2z$, sabendo que o cosseno da medida angular entre r_1 e r_2 é igual a $1/\sqrt{3}$.

Solução 7.
São duas soluções: $X = (1, 1, 1) + t(0, 1, 1)$ e $X = (1, 1, 1) + t(-4, 1, 1)$.

Dica: Tome Q como o ponto de intersecção entre a reta que procuramos e r_2. Note que, como Q pertence a r_2, $Q = (2t, t, t)$ para algum número real t. Já que $\vec{PQ}$ é um vetor diretor da reta procurada, basta achá-lo.

Exercício 8.
Determine o ponto P na reta $r_1 : X = (0, 2, 0) + t(0, 1, 0)$ e o ponto Q na reta $r_2 : X = (1, 2, 0) + t(0, 0, 1)$, tais que a reta PQ forme ângulos de 45° com r_1 e de 60° com r_2.

Solução 8.
São quatro soluções: $P = (0, 2, \pm\sqrt{2}, 0), Q = (1, 2, 1)$ e $P = (0, 2, \pm\sqrt{2}, 0), Q = (1, 2, -1)$. Releia a dica do exercício anterior e adapte ela adequadamente.

Exercício 9.
Obtenha uma equação geral do plano que contém r, e forma ângulo de θ radianos com π.

(a) $r : x = z + 1 = y + 2$, $\pi : x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\theta = \pi/3$

(b) $r : X = (8, 0, 0) + t(-8, 0, 8)$, $\pi : x + z + 1 = 0$, $\cos\theta = \sqrt{2/3}$

Solução 9.

(a) Duas soluções: $2x - 3y + z = 5$ e $-3x + y + z = -3$.

(b) Duas soluções: $x + y + 8 = 0$ e $x - y + z - 8 = 0$.

Exercício 10.
Ache a distância entre duas retas paralelas: $3x + 2y = 6$ e $6x + 4y = 9$. Note que as retas estão no plano cartesiano, i.e. são só duas variáveis. (Porque essas retas são paralelas?)

Solução 10.
Dica: Use o seguinte fato, se P é um ponto de uma reta r_1, a distância entre a reta r_1 e uma reta paralela r_2 é $d(P, r_2)$ (i.e. distância entre ponto P e a reta r_2).

Exercício 11.
Obtenha os pontos da reta r que equidistam das retas r_1 e r_2.

(a) $r : x - 1 = 2y = z$, $r_1 : x = y = 0$, $r_2 : x - 2 = z = 0$

(b) $r : x = y = z$, $r_1 : X = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$, $r_2 : X = (0, 0, 1) + t(1, 0, -1)$

Solução 11.

(a) $(1, 0, 0)$ e $(19/3, 8/3, 16/3)$.

(b) $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

Exercício 12.
Ache as equações dos planos paralelos ao plano $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ e que distam 2 desse plano.

Solução 12.
Dica: Lembre que o vetor normal $\vec{n}$ do plano dado é $(3, -2, 6)$. Então o que você procura é um plano que possui o mesmo vetor normal mas que dista 2. A equação do segundo plano será: $\pi_2 : 3x - 2y + 6z + d = 0$ com d a determinar. A distância entre os planos é dada tomando um ponto do primeiro plano, por exemplo, $P = (0, 1, -1)$ e agora usando a fórmula da distância de um ponto a um plano obteremos que $2 = dist(P, \pi_2) = \frac{|(3)(0)+(-2)(1)+(6)(-1)+d|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}$ e basta resolver esta equação.

Exercício 13.
Determine a reta r que contém o ponto A, é paralela ao plano π, e que dista d da reta r_1.

(a) $A = (1, 3, -1)$, $\pi : x + z = 2$, $r_1 : x - z = y + 2 = z - x + 4$, $d = 3$.

(b) $A = (1, 2, 0)$, $\pi : x + y + z = 1$, $r_1 : X = (0, 3, 2) + t(1, 1, 0)$, $d = 2$.

Solução 13.
Dica: Use o fato que o vetor diretor da reta r perpendicular ao vetor normal do plano π. Aplique a formula para a distância entre duas retas no espaço para obter o vetor diretor da r.

Exercício 14.
Sejam $r_1 : X = (1, 0, 2) + t(2, 1, 3)$ e $r_2 : X = (0, 1, -1) + t(1, m, 2m)$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r_1 e r_2.

Solução 14.
Existe valor para m tal que esses vetores sejam paralelos? Estude coplanaridade das retas.

Exercício 15.
Para que valores de m a reta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ é transversal ao plano $\pi : x + my + z = 0$?

Solução 15.
Para qualquer valor não nulo.

Exercício 16.
Obtenha, em cada caso, uma equação vetorial da reta que contém P, é paralela ou contida no plano π, e é concorrente com a reta r.

(a) $P = (1, 1, 0)$, $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$, $r : X = (1, 0, 0) + t(-1, 0, 1)$

(b) $P = (1, 0, 1)$, $\pi : x - 3y - z = 1$, $r : X = (0, 0, 0) + t(2, 1, -1)$

(c) $P = (1, 2, 1)$, $\pi : x - y = 0$, $r : X = (1, 0, 0) + t(2, 2, 1)$

(d) $P = (2, -1, 2)$, $\pi : x + y + z = 0$, r é a interseção dos planos $\pi_1 : x = z$ e $\pi_2 : z = y + 2$

Solução 16.

(a) $X = (1, 1, 0) + t(1, -3, -1)$.

(b) Há infinitas soluções. Explicação geométrica: como o plano determinado por P e r é paralelo a π, qualquer reta que contém P e é concorrente com r é paralela a π.

(c) Não existe solução. Motivo geométrico: r é paralela a π, mas o plano determinado por P e r é transversal a π.

(d) $X = (2, -1, 2) + t(1, -2, 1)$.

Exercício 17.
Obtenha uma equação geral do plano que contém $P = (1, 3, 4)$, e é paralelo a $\pi : x + y + z + 1 = 0$.

Solução 17.
$x + y + z - 8 = 0$.

Exercício 18.

Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto $P = (0, 2, 1)$ e forma ângulos congruentes com as retas $r_1 : X = (0, 0, 0) + t(1, 2, 2)$, $r_2 : X = (1, 2, 3) + t(0, 3, 0)$ e $r_3 : X = (1, 2, 0) + t(0, 0, 3)$.

Solução 18.

São quatro soluções: $X = (0, 2, 1) + t(-1, 1, 1)$, $X = (0, 2, 1) + t(-7, 1, 1)$, $X = (0, 2, 1) + t(3, 1, -1)$ e $X = (0, 2, 1) + t(3, -1, 1)$.

Exercício 19.

Obtenha uma equação geral do plano que contém r_1 e forma ângulo de θ radianos com r_2.

(a) $\cos\theta = 1/9$, $r_2 : 2z = 4 - y = x + 5$, $r_1 : X = (2, 0, 3) + t(1, 1, 1)$.

(b) $\cos\theta = 4\sqrt{3}/7$, $r_2 : X = (1, 0, 0) + t(1, 2, 3)$, r_1 contém $A = (1, 0, -2)$ e $B = (1, 1, 0)$.

Solução 19.

(a) Não existe plano.

(b) $3x - 2y + z - 1 = 0$ ou $x + 10y - 5y - 11 = 0$.