

# Lista 3 com respostas

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT0105 - 1º semestre de 2023

## Exercício 1.

Sendo que  $\vec{w} = (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$ , determine o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , sabendo que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$  e  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ .

## Solução 1.

$$\theta = 150^\circ$$

## Exercício 2.

Sendo  $\vec{u} = (-1, -1, m)$ ,  $\vec{v} = (7, 5, 1)$  e  $\vec{w} = (a, b, c)$ . Ache o valor de  $m$  para que a equação  $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$  possa ter solução.

## Solução 2.

$$m = 12$$

## Exercício 3.

Verdadeiro ou falso? Se for verdadeiro, demonstre, se for falso, dê contra-exemplo:

$$(a) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

$$(b) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \text{ e } \vec{b} \text{ são paralelos.}$$

$$(c) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}.$$

## Solução 3.

(a) Verdadeiro

(b) Verdadeiro

(c) Falso

**Exercício 4.**

Seja  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal. Calcule o produto vetorial entre

(a)  $7\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$  e  $5\vec{i} - 15\vec{j} - 13\vec{k}$

(b)  $6\vec{i} - 16\vec{j} - 15\vec{k}$  e  $3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

(c)  $3\vec{i} + 3\vec{j}$  e  $5\vec{i} + 4\vec{j}$

**Solução 4.**

(a)  $(129, 121, -90)$

(b)  $(77, -33, 66)$

(c)  $(0, 0, -3)$

**Exercício 5.**

Considere  $A = (-1, 1, 2)$ ,  $B = (0, 1, 3)$  e  $C = (-1, 2, 8)$  num sistema Cartesiano. Encontre a área do paralelogramo de lados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$

**Solução 5.**

$3\sqrt{14}$

**Exercício 6.**

Considere  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 5)$  numa base ortonormal.

(a) Calcule a área do triângulo  $ABC$ .

(b) Calcule a distância de  $B$  a reta que contém o vetor  $\overrightarrow{AC}$ , isto é encontre a altura do triângulo  $ABC$  relativa ao vértice  $B$ .

(c) Calcule o volume do paralelepípedo com arestas  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AD}$ .

(d) Calcule a distância do ponto  $D$  ao plano que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**Solução 6.**

(a)  $\sqrt{3}$

(b)  $\sqrt{6/7}$

(c) 8

(d)  $4\sqrt{3}/3$

**Exercício 7.**

Sejam  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, a, 1 - a)$  numa base ortonormal. Encontre  $a$  de modo que o volume do paralelepípedo com arestas  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AD}$  seja 10.

**Solução 7.**

$-2$  e  $3$

**Exercício 8.**

Dados os vetores  $\vec{u} = (1, 2, -1)$  e  $\vec{v} = (2, 1, 0)$  numa base ortonormal. Expresse o vetor  $\vec{a} = (2, 2, 3)$  como combinação de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

**Solução 8.**

$a = -9/14\vec{u} + 12/7\vec{v} - 11/4(\vec{u} \times \vec{v})$

**Exercício 9.**

Dado  $\vec{b} = (1, 2, 1)$  numa base ortonormal, determine  $\vec{a}$  tal que  $\vec{a}$  seja ortogonal ao eixo  $z$  e  $\vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 1)$ .

**Solução 9.**

$\vec{a} = (1, 1, 0)$

**Exercício 10.**

Determine  $\vec{v} = (x, y, z)$  tal que  $(x, y, z) \times (1, 2, -1) = (1, 1, 3)$  e  $(x, y, z) \cdot (3, 1, 1) = 3$  numa base ortonormal.

**Solução 10.**

$$\vec{v} = \left(\frac{5}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$$

**Exercício 11.**

Prove que  $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$  de dois modos: primeiro calculando diretamente e segundo utilizando as propriedades de  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

**Solução 11.**

Note que as matrizes construídas para formar o produto misto possuem linhas iguais.

**Exercício 12.**

Mostre que  $(-5, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$  num sistema Cartesiano são os vértices de um triângulo isósceles e ache sua área.

**Solução 12.**

$$AB = CA = \sqrt{29} \text{ e } BC = 4, \text{ área} = 10$$

**Exercício 13.**

Sejam  $A = (a, 0)$  e  $B = (0, a)$ , com  $a \neq 0$  num sistema Cartesiano. Ache número  $x$  de modo que o ponto  $C = (x, x)$  seja o terceiro vértice do triângulo equilátero  $ABC$ .

**Solução 13.**

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{2}}{2}$$

**Exercício 14.**

Dados os vértices  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (-2, -1, 0)$  e  $C = (2, 1, 1)$  de um triângulo  $ABC$ , escreva equações paramétricas da mediana relativa ao vértice de  $A$ .

**Solução 14.**

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 1 - 1/2t \end{cases}$$

**Exercício 15.**

Dados  $A = (4, 0, -3)$ ,  $B = (2, -3, -2)$  e  $C = (m, n, 3)$ ,

(a) escreva as equações da reta  $AB$ ;

(b) determine  $m$  e  $n$  para que  $C$  fique na reta  $AB$ .

**Solução 15.**

$$(a) X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$(b) m = -8, n = -18$$

**Exercício 16.**

Escreva as equações das retas que contém as diagonais do paralelogramo  $ABCD$  de vértices  $A = (1, -2, 2)$ ,  $B = (2, 1, -1)$ ,  $C = (1, -6, 8)$  e  $D = (2, -3, 5)$ .

**Solução 16.**

$$r : X = A + t_1 \overrightarrow{AC} \text{ e } s : X = D + t_2 \overleftarrow{DB}$$

**Exercício 17.**

Dado um sistema Cartesiano. Determine as equações paramétricas da reta que passa por  $P = (-2, 0, 1)$ , cujo vetor diretor é ortogonal a  $\vec{u} = (1, -2, 1)$  e que seja concorrente com a reta

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z - 3}{3}.$$

**Solução 17.**

$$r : X = (-2, 0, 1) + t \left( \frac{16}{7}, \frac{9}{7}, \frac{2}{7} \right)$$

**Exercício 18.**

Dado um sistema Cartesiano. Ache a equação da reta que passa pela origem e que seja perpendicular ao plano que passa pelos pontos  $(3, 4, 2)$ ,  $(-1, 5, 3)$ ,  $(2, 1, 4)$ .

**Solução 18.**

$$X = (0, 0, 0) + t(5, 7, 13)$$

**Exercício 19.**

Ache as equações das três medianas de um triângulo com vértices  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(0, c)$ .

**Solução 19.**

$$X = (a, 0) + t_1((b-2a)/2, c/2), X = (b, 0) + t_2((a-2b)/2, c/2), X = (0, c) + t_3((a+b)/2, -c)$$

**Exercício 20.**

Ache a equação da linha que passa por  $(-5, 7)$ , perpendicularmente a  $4x - 5y = 10$ .

**Solução 20.**

$$X = (-5, 7) + t(4, -5)$$

**Exercício 21.**

Dado um sistema Cartesiano. Ache as equações de duas retas que passam por  $(-2, 3)$ , uma paralela e outra perpendicular a  $3x + 2y + 5 = 0$ .

**Solução 21.**

$$X = (-2, 3) + t(-2, 3)$$

**Exercício 22.**

Dado um sistema Cartesiano. Determine  $a$  e  $b$  de modo que as equações  $x = at + 1$  e  $y = bt + 5$  sejam uma representação paramétrica da reta  $y = 2x + 3$ .

**Solução 22.**

$$a = -1/2 \text{ e } b = -1$$

**Exercício 23.**

Escreva uma equação do plano que passa pelos pontos  $A = (2, 2, -1)$ ,  $B = (0, 4, -2)$  e  $C = (-1, 3, 3)$ .

**Solução 23.**

$$X = (2, 2, -1) + s(-2, 2, -1) + t(-3, 1, 4)$$

**Exercício 24.**

Determine  $a$  de modo que o ponto  $(3, 1, a)$  pertença ao plano determinado por  $A = (1, 1, 2)$ ,  $B = (3, 0, 2)$  e  $C = (4, 1, 3)$ .

**Solução 24.**

$$a = 8/3$$

**Exercício 25.**

Dado um sistema Cartesiano. Determine uma equação geral do plano que passa pelas retas

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+6}{13}$$

e

$$\frac{x-4}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-7}{4}.$$

**Solução 25.**

$$-3x + 7y - 2z = 5$$

**Exercício 26.**

Dado um sistema Cartesiano. Escreva uma equação geral do plano determinado pelo ponto  $(1, 2, 1)$  e pela reta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z.$$

**Solução 26.**

$$-x - y + z = -2$$

**Exercício 27.**

Dado um sistema Cartesiano. Escreva uma equação do plano perpendicular ao plano  $x + y + z - 1 = 0$  e paralelo a reta

$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

e passando por  $P = (1, 5, 3)$ .

**Solução 27.**

$$(x, y, z) = (1, 5, 3) + t_1(1, 1, 1) + t_2(1, 2, 3)$$

**Exercício 28.**

Determine as equações na forma paramétrica e na forma simétrica das seguintes retas:

- (a) a reta que passa pelos pontos  $A = (1, 4, -2)$  e  $B = (0, 1, 1)$ ;
- (b) a reta que passa pelos pontos  $A = (1, 0, -2)$  e  $B = (3, 1, 1)$ ;
- (c) as retas que determinam os eixos  $Ox, Oy, Oz$ ;
- (d) a reta paralela ao eixo  $Oz$  que passa pelo ponto  $(1, 2, 1)$ ;
- (e) a reta paralela ao eixo  $Ox$  que passa pelo ponto  $(1, 2, 1)$ ;
- (f) a reta paralela a reta  $\frac{1-2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2z+1}{4}$  que passa pelo ponto  $(2, 1, 0)$ ;
- (g) a reta paralela a reta  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$  que passa pelo ponto  $(2, 1, 0)$ .

**Solução 28.**

- (a)  $X = (1, 4, -2) + t(-1, -3, 3)$
- (b)  $X = (1, 0, -2) + t(2, 1, 3)$
- (c)  $X = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$ ,  $X = (0, 0, 0) + t(0, 1, 0)$ ,  $X = (0, 0, 0) + t(0, 0, 1)$
- (d)  $X = (1, 2, 1) + t(0, 0, 1)$
- (e)  $X = (1, 2, 1) + t(1, 0, 0)$
- (f)  $X = (2, 1, 0) + t(-3/2, 4, 2)$
- (g)  $X = (2, 1, 0) + t(-3, 5, -1)$

Os outros formatos para equações da reta são fáceis de obter a partir desse.



**Exercício 29.**

Dados  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (4, 5, 6)$  determine a equação paramétrica da reta que passa por  $A$  e  $B$ . Determine também os pontos onde essa reta corta os planos coordenados  $Oxy$ ,  $Oxz$  e  $Oyz$ .

**Solução 29.**

$X = (1, 2, 3) + t(3, 3, 3)$ , pontos  $(-2, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1)$  e  $(0, 1, 2)$

**Exercício 30.**

Os lados de um triângulo estão sobre as retas  $y = 2x + 1$ ,  $y = 3x - 2$  e  $y = 1 - x$ . Ache os vértices desse triângulo.

**Solução 30.**

$(0, 1)$ ,  $(3, 7)$  e  $(3/4, 1/4)$ .

**Exercício 31.**

Ache o vetor diretor e três pontos que pertencem a reta

$$2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5.$$

**Solução 31.**

$X = (1/2, -2, 5/4) + t(1/2, 1/4, 1/3)$ ,  $\vec{v} = (1/2, 1/4, 1/3)$  e os pontos  $(1/2, -2, 5/3)$ ,  $(1, -7/4, 2)$  e  $(0, -9/4, 4/9)$ .