Lista 2 com respostas

Nataliia Goloshchapova

MAT0105 - 1° semestre de 2023

Exercício 1.
Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC. Explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é base, e determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nessa base.

Solução 1.
Note que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Exercício 2.
Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base, $\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = 3\vec{e_3}$. Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base.

Solução 2.
Dica: Mostre que $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI.

Exercício 3.
Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:

(a) $A = (1,0,1)$, $B = (2,2,0)$ e $C = (0,-2,2)$

(b) $A = (0,1,-1)$, $B = (1,2,0)$ e $C = (0,2,1)$

(c) $A = (3,1,4)$, $B = (2,7,1)$ e $C = (0,1,5)$

Solução 3.

(a) Temos que $\overrightarrow{AB} = (1,2,-1)$ e que $\overrightarrow{AC} = (-1,-2,1)$. Se os pontos fossem colineares $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, para algum λ real não nulo. Isso é possível?

Exercício 4.
Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$.

(a) Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo.

(b) Determine o ponto médio de AC e o ponto médio de BD.

Solução 4.

(a) Escreva os vetores $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$ explicitamente considerando $D = (x, y, z)$ a determinar. Após isso note que, como estamos querendo construir um paralelogramo, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

(b) Use as formulas para as coordenadas de ponto médio de um segmento.

Exercício 5.
Considere um hexágono regular $ABCDEF$ de centro O. Determine as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D, E e F nos seguintes sistemas de coordenadas:

(a) $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$

(b) $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$

(c) $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$

(d) $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

Solução 5.

(a) $A = (0, -1)$, pois $\overrightarrow{OA} = 0 \cdot \overrightarrow{OC} + (-1) \cdot \overrightarrow{OD}$.
$B = (1, -1)$, pois $\overrightarrow{OA} = 1 \cdot \overrightarrow{OC} + (-1) \cdot \overrightarrow{OD}$ e assim por diante.

Exercício 6.
Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nas bases do exercício anterior:

(a) $\overrightarrow{CD}$

(b) $\overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{AC}$

(d) $\overrightarrow{BE}$

Solução 6.
Observe que $\overrightarrow{CD} = 1 \cdot \overrightarrow{OD} + (-1) \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \cdot \overrightarrow{OC} + 1 \cdot \overrightarrow{OE} = 0 \cdot \overrightarrow{BC} + 1 \cdot \overrightarrow{BO} = 0 \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BE}$. Portanto, $\overrightarrow{CD} = (1, -1)$ na base $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{CD} = (0, 1)$ na base $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{CD} = (0, 1)$ na base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$, $\overrightarrow{CD} = (0, \frac{1}{2})$ na base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$.

Exercício 7.
Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3), \vec{v} = (2, 1, 3), \vec{w} = (-1, -1, 4)$, determine a tripla de coordenadas de:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$

(b) $\vec{u} - 2\vec{v}$

(c) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

Solução 7.

(a) $(3, 0, 6)$

(b) $(-3, -3, -3)$

(c) $(8, 4, -3)$

Exercício 8.
Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Calcule $||\vec{u}||$ nos casos:

(a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$

(b) $\vec{u} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$

(c) $\vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_3}$

(d) $\vec{u} = -4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$

Solução 8.

(a) $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(b) $||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

(c) $||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

(d) $||\vec{u}|| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$

Exercício 9.
Dado o paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$, sejam $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{AF}$ e $\vec{e_4} = \overrightarrow{AE}$. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas:

(a) $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

(b) $(A, \vec{e_4}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Solução 9.
Achar as coordenadas de um ponto X num sistema de coordenadas $(O, \mathcal{B})$ é o mesmo que encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OX}$ na base $\mathcal{B}$. Então, no caso do ponto G para o item (a) deste exercício, temos que: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$. Observe que, assim, $G = (-1, 2, 1)$.

Exercício 10.
Exprima o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como combinação linear de $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1)$.

Solução 10.
$\vec{w} = (1, 0) + (0, 1) = (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{u} - 2\vec{v}) = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

Exercício 11.
Dados $A = (4, 8, 11)$, $B = (-3, 1, 4)$ e $C = (2, 3, -3)$. No triângulo ABC ache:

- o comprimento dos três lados do triângulo,
- os pontos médios dos três lados do triângulo,
- os ângulos entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Solução 11.
Dica: use as formulas para todos os objetos indicados no exercício.

Exercício 12.
Mostre que se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem o mesmo comprimento, então $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ são perpendiculares.

Solução 12.
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 0$

Exercício 13.
(a) Expresse o vetor $\vec{w} = (1, 3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, onde $\vec{u}$ é paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{v}$ é ortogonal a $(0, 1, 3)$

(b) Encontre um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(2, -4, 6)$ tal que $||\vec{u}|| = 3\sqrt{3}$.

Solução 13.

(a) **Metodo 1:** Pela definição, $\vec{u} = Proj_{(0,1,3)}\vec{w}$.
Metodo 2: Leve em consideração as informações do enunciado para obter que $\vec{u} = (0, \lambda, 3\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo. Além disso, $\vec{v} \perp (0, 1, 3) \Rightarrow \vec{v} = (x, -3y, y)$ para alguns $x, y \in \mathbb{R}$ não nulos. Então basta resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 0 = 1 \\ \lambda - 3y = 3 \\ 3\lambda + y = 2 \end{cases}$. Obtemos $x = -1, \lambda = \frac{9}{10}, y = \frac{-7}{10}$.

(b) Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Note que hipóteses do problema implicam seguinte sistema $\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 - u_3 & = 0 \\ 2u_1 - 4u_2 + 6u_3 & = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & = 27 \end{cases}$

Exercício 14.

(a) Mostre que não existe x tal que os vetores $\vec{v} = (x, 2, 3)$ e $\vec{u} = (x, -2, 3)$ sejam perpendiculares.

(b) Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e entre os vetores $\vec{w} = (1, 1, 1)$ e $\vec{z} = (0, -2, -2)$.

Solução 14.

(a) Suponha que exista tal x. Teremos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ Logo, $x^2 - 4 + 9 = 0$, consequentemente, $x^2 = -5$. Portanto $x \notin \mathbb{R}$.

(b) Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\theta ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$ teremos que $\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\theta$. Aplique a função arccos para obter a resposta.

Exercício 15.

Prove que os vetores $\vec{u} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 6\vec{i} - 16\vec{j} - 15\vec{k}$ são dois a dois perpendiculares.

Solução 15.
Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = 21-9-12 = 0$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = 42+48-90 = 0$ e $\vec{v}\cdot\vec{w} = 18-48+30 = 0$ segue que eles são dois a dois perpendiculares.

Exercício 16.
Determine m para que os vetores $(2, m, -3)$ e $(2, 2, m)$ sejam ortogonais.

Solução 16.
Já que os vetores são ortogonais, $4+2m+(-3)m = 0$ que é o produto escalar dos dois vetores, logo $m = 4$.

Exercício 17.
Sejam $\vec{u} = (2, 1, -3)$ e $\vec{v} = (1, 2, 1)$.

(a) Se $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$, determine λ para que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam ortogonais.

(b) Determine o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução 17.

(a) Note que $\vec{w} = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$ então para decidirmos qual λ faz o serviço de tornar este $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ basta resolver a seguinte equação para λ: $2(2 + \lambda) + (1 + 2\lambda) + (-3)(-3 + \lambda) = 0$.