

Lista 1 com respostas

NATALIJA GOLOSHCHAPOVA

MAT0105 - 1º semestre de 2023

Exercício 1.

Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta:

(a) $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(c) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(d) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{CD}\| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$

Solução 1.

(a) Verdadeira

(b) Falsa

(c) Falsa

(d) Falsa

Exercício 2.

Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , prove que as afirmações seguintes são equivalentes:

(a) Os vetores \vec{u} e \vec{v} não são múltiplos.

(b) Uma combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ só pode ser igual ao vetor nulo quando $\alpha = \beta = 0$.

(c) Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v}$, então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

Solução 2.

$$(a \Rightarrow b)$$

Basta observar $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v}$.

($b \Rightarrow c$)

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} \Rightarrow (\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha - \alpha' = 0, \beta - \beta' = 0$$

($c \Rightarrow a$)

Se (c) for verdade, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Logo é impossível escrever $\vec{u} = \lambda\vec{v}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 3.

Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

Solução 3.

Seja um trapézio $ABCD$ com AB e DC suas bases e MN um segmento que liga os pontos médios de AD e BC . Logo teremos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MD}$ (use polígono fechado $MNCD$). Do outro lado, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}$ (use polígono fechado $MNBA$). Pegando soma de duas igualdades, obtemos $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. O resto segue dessa igualdade.

Exercício 4.

Sejam $\triangle EFG$ um triângulo qualquer, P, Q, R os pontos médios dos lados EF, FG, GE respectivamente. Mostre que $EPQR$ é um paralelogramo.

Solução 4.

Basta mostrar que \overrightarrow{PQ} é paralelo a \overrightarrow{ER} e analogamente que \overrightarrow{PE} é paralelo a \overrightarrow{QR} . Veja que por estarmos tratando de pontos médios dos lados dos triângulos, vamos ter as seguintes identidades:

$$2\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{EF} \text{ e } 2\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FG}.$$

Note que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$. Substitua as identidades acima nesta equação para obter que $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{PQ}$, isto é, os vetores são paralelos. Logo $\overrightarrow{ER} \parallel \overrightarrow{PQ}$. A análise do outro par de vetores é análoga.

Exercício 5.

Dado um paralelepípedo $ABCDEFGH$, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima em função de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ os seguintes vetores:

(a) \overrightarrow{HB}

(b) \overrightarrow{DF}

(c) \overrightarrow{AG}

(d) \overrightarrow{EC}

Solução 5.

(a) $\overrightarrow{HB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

(b) $\overrightarrow{DF} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

(c) $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(d) $\overrightarrow{EC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

Exercício 6.

Dado um hexágono regular $ABCDEF$, de centro O , determine a soma dos vetores indicados:

(a) $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC}$

(b) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CO}$

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC}$

Solução 6.

(a) $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FC}$

(b) \overrightarrow{FC}

(c) \overrightarrow{OD}

Exercício 7.

Dado um hexágono regular $ABCDEF$, de centro O . Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Solução 7.

Dica: note que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

Exercício 8.

Calcule a soma dos seis vetores que tem por representantes segmentos orientados com origens em cada um dos vértices e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

Solução 8.

Dica: desenha o hexágono regular e observe os vetores que se anulam.

Exercício 9.

Dados quatro pontos distintos, A, B, C , e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ e λ é um número real. Escreva \overrightarrow{CX} como combinação linear de \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{CB} .

Solução 9.

Dica: use o fato $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$.

Exercício 10.

Dado um quadrilátero $ABCD$ tal que $\overrightarrow{AD} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

(a) Determine \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{CA} em função de \vec{u} e \vec{v} .

(b) Prove que $ABCD$ é um trapézio.

Solução 10.

$$(a) \begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= 2\vec{u} - \vec{v} \\ \overrightarrow{BD} &= 5\vec{u} - \vec{v} \\ \overrightarrow{CA} &= -3\vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

(b) Note que existem dois lados paralelos de normas distintas.

Exercício 11.

Dados três vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AC} tais que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$ e $\|\overrightarrow{AD}\| = 3$. AD é uma bissetriz de $\hat{C}AB = 60^\circ$. Escreva o vetor \overrightarrow{AD} como combinação linear de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Solução 11.

Dicas: o objetivo é descobrir os coeficientes da seguinte combinação linear

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AB}.$$

Utilize lei dos senos para determinar $\|\alpha\overrightarrow{AC}\|$ e $\|\beta\overrightarrow{AB}\|$ e depois coeficientes α e β .

Resposta: $\overrightarrow{AD} = 1/2\overrightarrow{AC} + 3/2\overrightarrow{AB}$.

Exercício 12.

Em um triângulo ABC o ponto M pertencente ao lado BC satisfaz a condição $3\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MC}$. Escreva o vetor \overrightarrow{AM} em função de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Solução 12.

Dica: mostre no primeiro que $\overrightarrow{BM} = \frac{7}{10}\overrightarrow{BC}$.

Resposta: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}$.

Exercício 13.

São dados $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c}$ e $\overrightarrow{BQ} = \frac{4}{5}\vec{a}$. Escreva \overrightarrow{PQ} em função de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .

Solução 13.

Dica: use o fato que OAPQB é polígono fechado.

Resposta: $\overrightarrow{PQ} = -1/5\vec{a} + \vec{b} - 1/3\vec{c}$.

Exercício 14.

Prove que:

- (a) \vec{u}, \vec{v} são LD $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD
- (b) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ são LI
- (c) \vec{u}, \vec{v} são LD $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ são LD

Solução 14.

- (a) Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{PA}, \vec{v} = \overrightarrow{PB}, \vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Se \vec{u}, \vec{v} forem LD, então \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} são paralelos. Logo, $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ e \overrightarrow{PC} são coplanares e, portanto $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD.
- (b) Raciocine por redução ao absurdo e utilize a parte (a).
- (c) Use o fato que $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Exercício 15.

As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas?

- (a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ são LD
- (b) \vec{u}, \vec{v} são LI $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI
- (c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ são LD

Solução 15.

Todas afirmações são falsas.