Lista 8 - MAT-211 - MAT-216 - 2022

(I) Considere o campo $\vec{F}(x,y) = (3x^2y^2 + \dfrac{3}{x^2})\vec{i} + (2x^3y + 8y)\vec{j}$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$.

(i) Determine uma função $f(x,y)$ tal que $\bigtriangledown f(x,y) = \vec{F}(x,y)$.
Dessa forma, fica provado que $\vec{F}$ é um campo conservativo em D.

(ii) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, sendo $\gamma(t) = (3^{t^4} + t, \dfrac{3t}{t^4+2})$, com $0 \leq t \leq 1$.

(II) (i) Prove que o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ é conservativo em $D = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$, determinando uma função potencial para $\vec{F}$.

(ii) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (cos^3 t, sen^3 t)$, com $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(III) Considere o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{y+1}{4x^2+(y+1)^2}\vec{i} + \dfrac{-x}{4x^2+(y+1)^2}\vec{j}$
em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,-1)\}$.

(i) Verifique que $rot\vec{F} = \vec{0}$.

(ii) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, sendo γ a curva $4x^2 + (y+1)^2 = 4$, orientada no sentido anti-horário.
Conclua que este campo $\vec{F}$ não é conservativo em D.

Este exemplo ilustra que o fato de um campo ter rotacional nulo num domínio não implica que tal campo seja conservativo neste domínio.

(IV) Mostre que a integral $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,-3)} 2xydx + (x^2 - y^2)dy$ é independente de caminho em $\mathbb{R}^2$ e calcule-a.

(V) (i) Mostre que o campo $\vec{F}(x,y,z) + (y^2cosx + z^3, 4 + 2ysenx, 3xz^2 + 2)$ é conservativo em $\mathbb{R}^3$, determinando uma função potencial para ele.

(ii) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, sendo γ uma curva de classe C^1, ligando os pontos $(0,0,0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1, -1)$.