MAT0554 - Panorama de Matemática (ano 2021)

Profa Nataliia Goloshchapova

Cada exercício vale alguns pontos. A nota atribuída será a quantidade dos pontos recebidos.

Definição 1. Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Então $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito um *autovalor* de A se existir $f \in D(A)$ tal que $Af = \lambda f$. Denotamos por $\sigma_p(A)$ (*espectro pontual*) o conjunto dos autovalores do operador A.

Definição 2.

$$H^1(a,b) = \left\{ f \in AC[a,b] : f' \in L^2(a,b) \right\}, \quad H^2(a,b) = \left\{ f \in C^1([a,b]) : f' \in H^1(a,b) \right\}.$$

Para $\mathcal{J} = (0,\infty)$ ou $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ definimos

$$H^1(\mathcal{J}) = \left\{ f \in L^2(\mathcal{J}) : f \in AC[a,b] \text{ para todo } [a,b] \subseteq \overline{\mathcal{J}} \text{ e } f' \in L^2(\mathcal{J}) \right\},$$

$$H^2(\mathcal{J}) = \left\{ f \in C^1(\mathcal{J}) :\ f' \in H^1(\mathcal{J}) \right\}.$$

Definição 3. Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Operador A é dito *não negativo* ($A \geq 0$) se $(Af, f) \geq 0$ para todo $f \in D(A)$.

Exercícios

1. (**2 pontos**) Seja $A : l^2 \to l^2$ tal que $A\{x_j\} = \{\alpha_j x_j\}$, onde $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ é uma sequência limitada. Ache $\sigma(A)$ e $\sigma_p(A)$. Quando $\sigma(A)$ consiste dos pontos isolados? Dê um exemplo de $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ quando $\sigma(A) = [a,b]$.

   Dica: Use o fato que $\sigma(A)$ é fechado.

2. (**2 pontos**) Seja $\varphi(t)$ uma função contínua em $[0,1]$. Considere o operador $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ tal que $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$. Quando $\sigma_p(A) \neq \emptyset$? Qual é $\sigma_p(A)$ para $\varphi(t) = t$?

3. (**2 pontos**) Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = L^2(a,b)$,

   $$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad D(A) = \left\{ f \in H^2(a,b) : f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0 \right\}.$$

   Mostre que

   $$A^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad D(A^*) = H^2(a,b).$$

   Dica: use o fato que $\operatorname{Ran}(A)^\perp \subseteq \operatorname{span}\{1, x\}$.

4. (**2 pontos**) Considere o subespaço linear $\mathcal{D} = \{(f_1, f_2) : f_1 \in H^1(0,1), f_2 \in H^1(2,3)\}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0,1) \oplus L^2(2,3)$. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Define os operadores lineares A_k, $k = 1,2,3$, como

   $A_k(f_1, f_2) = (if_1', if_2')$ com os domínios:

   $D(A_1) = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{D} : f_1(0) = zf_2(3)\}$;

   $D(A_2) = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{D} : f_1(0) = zf_2(3), f_1(1) = wf_2(2)\}$;

   $D(A_3) = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{D} : f_1(0) = f_2(3) = 0, f_1(1) = zf_2(2)\}$.

   Ache os operadores adjuntos A_1^*, A_2^*, A_3^*.

5. (**1.5 pontos**) Sejam A_1 e A_2 os operadores fechados nos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respetivamente.

   $a)$ Mostre que $A_1 \oplus A_2$ é operador fechado no $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

   $b)$ Mostre que $\sigma\left(A_1 \oplus A_2\right) = \sigma\left(A_1\right) \cup \sigma\left(A_2\right)$.

6. (**2.5 pontos**) Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = L^2(0,1)$,

$$A = i\frac{d}{dx}, \qquad D(A) = \left\{f \in H^1(0,1) : f(1) = 0\right\}.$$

   $a)$ Mostre que A é operador fechado.

   $b)$ Ache A^*.

   $c)$ Ache $\sigma(A)$ e o operator $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(A)$.

7. (**3 pontos**) Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ não negativo.

   $a)$ Mostre que A é simétrico.

   $b)$ Mostre que $(-\infty, 0) \subseteq \hat{\rho}(A)$.

   $c)$ Observe que os índices de deficiência $d_\lambda(A)$ do A em $\mathbb{C}_+$ e $\mathbb{C}_-$ são iguais. Denotamos $d_\lambda(A) = n$. Suponha que $\tilde{A}$ é extensão auto adjunta de A. Mostre que o numero dos autovalores negativos de $\tilde{A}$ não pode ser maior que n.

8. (**2 pontos**) Sejam T e S operadores simétricos no $\mathcal{H}$.

   $a)$ Mostre que $\alpha T + \beta S$ é operador simétrico para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   $b)$ Suponha que $\ker(T) = \{0\}$. Mostre que T^{-1} é um operador simétrico.

9. (**1.5 pontos**) Sejam A_1 e A_2 os operadores simétricos no $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respetivamente. Mostre que $A_1 \oplus A_2$ é um operador simétrico no $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ com índices de deficiência $d_\lambda\left(A_1 \oplus A_2\right) = d_\lambda\left(A_1\right) + d_\lambda\left(A_2\right), \lambda \in \mathbb{C}_\pm$.

10. (**1 ponto**) Seja A um operador auto-adjunto no $\mathcal{H}$. Mostre que o número (real) λ é um autovalor de A se, e somente se, $\operatorname{Ran}(A - \lambda I)$ não é densa em $\mathcal{H}$.

11. (**2 pontos**) Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = L^2(0,\infty)$,

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad D(T) = \{f \in H^2(0,\infty) : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

   $a)$ Mostre que $d_\lambda(A) = 1, \lambda \in \mathbb{C}_\pm$ e determine subespaços $\ker\left(A^* \mp iI\right)$.

   $b)$ Descreva todas extensões auto adjuntas de A em termos de condições de fronteira em 0.

12. (**1.5 pontos**) Seja $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Suponha que existe $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que

$$(Af, g) = (f, Bg), \text{ para todos } f, g \in \mathcal{H}.$$

   Mostre que A é limitado.