MAT0554 - Panorama de Matemática

Profa Nataliia Goloshchapova

Trabalho: Fazer 4 exercícios da Parte 1 e 2 exercícios da Parte 2.

Parte 1

Ex. 1. Resolve o sistema

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = 3f(t) + 4g(t) \\ \frac{dg(t)}{dt} = f(t) + 3g(t), \end{cases}$$

sabendo que $f(0) = 1, g(0) = 1$.

Ex. 2. Ache a n-esima potência das matrizes:

(a)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ache e^{tA}, onde A é cada das matrizes acima.

Ex. 3. Ache a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y(t).$$

Ex. 4. Mostre que para qualquer conjunto compacto M em $\mathbb{C}$ existe um operador A linear e limitado tal que $\sigma(A) = M$.

Ex. 5. Seja f uma função analítica por volta de λ_j. Ache $f(J_j)$, onde J_j é o bloco de Jordan correspondente.

Ex. 6. Seja $A : l^2 \to l^2$ tal que $A\{x_j\} = \{\alpha_j x_j\}$, onde $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ uma sequência limitada. Ache $\sigma(A)$ e $\sigma_p(A)$. Quando $\sigma(A)$ consiste dos pontos isolados? Dê um exemplo de $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ quando $\sigma(A) = [a, b]$.

Ex. 7. Considere operador $A : l^2 \to l^2$ dado por $A\{x_j\} = \{y_j\}$ onde

$$y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty.$$

Mostre que A é compacto. Quando A será auto-adjunto?

Ex. 8. Seja $\varphi(t)$ uma função contínua em $[0, 1]$. Considere o operador $A : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ tal que $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$. Quando $\sigma_p(A) \neq \emptyset$? Qual é $\sigma_p(A)$ para $\varphi(t) = t$?

Parte 2

Ex. 9. Sejam E um espaço normado, $A \in B(E)$, e $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ um polinômio complexo. Mostre que $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A))$.

Dica: use o fato que $\lambda - p(A) = a_n(\alpha_1 - A)\dots(\alpha_n - A)$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são raízes de $\lambda - p(z)$.

Ex. 10. Seja A um operador compacto e auto-adjunto num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ ($\dim(\mathcal{H}) = \infty$) com espectro $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Seja P_{λ_j} a projeção ortogonal ao $\ker(\lambda_j - A)$. Mostre que a família $E(t) = \sum_{\lambda_j \le t} P_{\lambda_j}$ é a resolução da identidade.

Ex. 11. Seja $A \in B(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Suponha que $\lambda \in \sigma_r(A)$. Mostre que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Dica: lembre que $A^* \in B(\mathcal{H})$ define-se como $(Ax, y) = (x, A^*y), x, y \in \mathcal{H}$, e $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} \oplus \ker(\overline{\lambda} - A^*)$ (soma direta ortogonal).

Ex. 12. Seja $A : E \to E$ no espaço normado E da dimensão finita. Mostre unicidade da solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ex. 13. Seja E um espaço normado, $A \in B(E)$ e $\sigma(A) \subset \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$. Suponha que $y(t)$ é uma solução da equação $y'(t) = Ay(t)$. Prove que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.