Equações de Difusão em Variedades Compactas

Vitor Borges
vborges@ime.usp.br

Instituto de Matemática e Estatística - USP

Jul/2020

Outline

Motivação

Estamos interessados em estudar uma EDP da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Au = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

em uma variedade M, onde A é um operador diferencial. É natural se perguntar:

- Existência de soluções? Sob quais hipóteses em A e M?
- Unicidade?
- Regularidade?

Por que isso é interessante?

- Quando A tem ordem 2, equações desse tipo modelam fenômenos de difusão de movimentos Brownianos, representados pela equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \left(D(\boldsymbol{r}) \nabla \phi(t, \boldsymbol{r})\right).$$

- EDPs em variedades podem surgir naturalmente de problemas físicos ou servir de meio para provar outros tipos de resultados, a exemplo do Atiyah-Singer provado com métodos assintóticos da equação do calor.
- Equações de difusão também servem como protótipo de EDPs em outros contextos. Em análise complexa, a derivada complexa $\bar{\partial}$ induz um laplaciano complexo e uma equação do calor complexa

$$\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \quad \text{e} \quad u_t = \square u.$$

Notação

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ domínio (aberto conexo) limitado com fronteira suave $\partial\Omega$.
- $x \in \Omega$ ou $x \in M$.
- $\xi \in \mathbb{R}^N$ ou $\xi \in T_x M$.
- Notação de Einstein:

$$\sum_{j=1}^{N} a^j \frac{\partial}{\partial x_j} \rightsquigarrow a^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rightsquigarrow a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

- $C_0^\infty(\Omega) = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : f\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$
- Espaços de Sobolev:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m \right\},$$

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_m}, \quad \langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Variedades Suaves

Definição

Seja M um espaço topológico Hausdorff, segundo contável e localmente euclidiano. Dados abertos $(U_\alpha)_\alpha$ de M e $(\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^N)_\alpha$ homeomorfismos, dizemos que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ é um **atlas** para M se

1. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$,
2. $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é suave.

Um atlas maximal $\mathcal{A}$ é chamado uma **estrutura diferenciável** em M e o par $(M, \mathcal{A})$ é uma **variedade** (diferenciável/suave). Se, além disso, os determinantes dos jacobianos das trocas de cartas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ forem todos positivos, dizemos que M é uma **variedade orientada**, e se M for um espaço topológico compacto, dizemos que a variedade é **compacta**.

Definição

Dados $x \in M$ e U uma vizinhança de x, dizemos que um funcional linear $v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ é uma **derivação** em x se satisfaz a regra de Leibniz

$$v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f), \quad f, g \in C^\infty(U).$$

O **espaço tangente** T_xM em x é dado pelas derivações em x. Dado um sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_N))$, não é difícil mostrar que

$$T_xM = \operatorname{span}\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_N}\right|_x \right\}, \quad x \in U.$$

Um **campo vetorial** X em M é uma função suave tal que $X_x \in T_xM$. Em coordenadas,

$$X\big|_U = b^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b^j \in C^\infty(U).$$

Definição

Um **tensor** de rank 2 a em M é uma aplicação suave tal que

$$a_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear. Dizemos que a é **simétrico** (resp. **positivo**) se cada a_x for simétrico (resp. positivo). Em coordenadas $(U, x_1, \dots, x_N)$,

$$a^{ij}(x) = a_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x\right), \quad x \in U.$$

Em suma, em cada ponto podemos pensar em a como uma matriz com entradas $a^{ij}(x)$ e

$$a_x(\eta, \xi) = a^{ij}(x)\eta_i\xi_j, \text{ para } \eta, \xi \in T_xM.$$

Definição

Uma **métrica (Riemanniana)** g em uma variedade M é um 2-tensor simétrico e positivo definido, ou seja, para cada $x \in M$,

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

define um produto interno em T_xM, e escrevemos ainda

$$|\xi|^2 := g_x(\xi, \xi), \quad \xi \in T_xM.$$

Diferentemente do caso acima, denotamos os coeficientes da métrica em um sistema de coordenadas por g_{ij} e definimos

$$(g^{ij})^{-1} = (g_{ij}).$$

Chamamos de **variedade Riemanniana** o par (M, g).

Definição

Uma **partição da unidade** em M é uma coleção (ρ_α) de funções suaves a valores reais tais que para cada $x \in M$ e cada α,

i. $\rho_\alpha(x) \geq 0$,
ii. A coleção $\{\operatorname{supp} \rho_\beta\}$ é localmente finita, i.e., existe uma vizinhança U de x com $U \cap \operatorname{supp} \rho_\alpha \neq \varnothing$ só para finitos αs,
iii. $\sum \rho_\alpha(x) = 1$.

Teorema (Existência de Partições da Unidade)

Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M por abertos. Então existe uma partição da unidade (ρ_α) com $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subseteq U_\alpha$. Em particular, quando M é compacta, a cobertura é finita e as ρ_α têm suporte compacto.

Operadores Diferenciais em $\mathbb{R}^N$

Definição

Seja A um operador diferencial ordem m, definimos o **símbolo principal** de A por

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x)\xi^\alpha, \quad x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dizemos que A é **elíptico** se, para cada $x \in \Omega$, existe $c = c(x) > 0$ com

$$|p_m(x,\xi)| \geq c\,|\xi|^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Se A tiver ordem $2m$, dizemos que A é **estritamente elíptico** se a

$$(-1)^m p_{2m}(x,\xi) \geq c\,|\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Por que operadores estritamente elípticos?

- Operadores elípticos são hipoelípticos, i.e.,

$$Au = f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

- Várias vezes vamos querer mostrar estimativas do tipo

$$\|(\lambda - A)u\| \geq \lambda \|u\|, \quad \lambda > 0,$$

e para isso precisaremos de estimativas por baixo *globais* em A (por exemplo, a desigualdade de Gårding) que não conseguimos com a dependência $c = c(x)$. Por isso precisamos pedir que A seja estritamente elíptico e não só elíptico.

Equações Parabólicas em $\mathbb{R}^N$

Queremos resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Au = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

mostrando que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo.

Ideia

Mostraremos que se λ for grande o suficiente

- $-A_\lambda := -(\lambda + A)$ é dissipativo, e
- $\mu - (-A_\lambda) = (\mu + \lambda) + A$ é sobrejetor, para todo $\mu > 0$.

Teorema (Lumer-Phillips)

Seja A um operador fechado com domínio denso em um espaço de Banach X. Se

- I *A é dissipativo,*
- II *Existe algum $\lambda_0 > 0$ tal que $(\lambda_0 - A)$ é sobrejetor,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Definição

Lembramos que um operador A é **dissipativo** se

$$\|(\lambda - A)u\| \geq \lambda \|u\|, \quad \lambda > 0,\ u \in D(A).$$

Pergunta: Qual o espaço de Banach adequado?

Teorema (Desigualdade de Gårding)

Se A é um operador diferencial estritamente elíptico de ordem $2m$, existem constantes $c > 0$ e $\lambda_0 > 0$ tais que

$$\langle Au, u\rangle_0 \geq c\,\|u\|_m^2 - \lambda_0\,\|u\|_0^2, \quad u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega).$$

Demonstração: Faremos a demonstração em um caso simples: suponha que A tenha ordem 2, $A = a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^j\frac{\partial}{\partial x_j} + c$, e suponha que os coeficientes satisfaçam

$$\max\left(\sup_{\Omega}|a^{ij}|, \sup_{\Omega}|b^j|, \sup_{\Omega}|c|, \sup_{\Omega}\left|a^{ij}_{x_k}\right|, \sup_{\Omega}\left|b^j_{x_k}\right|, \sup_{\Omega}\left|a^{ij}_{x_l x_k}\right|\right) < \infty.$$

Então, dada $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_0 &= \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} u + b^j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + cu^2 \\
&= \int_\Omega \frac{\partial (a^{ij} u)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + b^j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \\
&= -\int_\Omega a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \int_\Omega a^{ij}_{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} u + \int_\Omega b^j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + \int_\Omega cu^2 \\
&\geq k \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \left(b^j - a^{ij}_{x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} u + \int_\Omega cu^2 \\
&= k \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(b^j - a^{ij}_{x_i} \right) - c \right] u^2 \\
&\geq k \|u\|_1^2 - \lambda_0 \|u\|_0^2 ,
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema (Existência e Regularidade de Soluções)

Para toda $u_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ *o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Au = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^1([0,\infty), H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega))$.

Esboço da Demonstração: Sejam λ_0 como na Desigualdade de Gårding e $\lambda > \lambda_0$. Lembramos que queremos usar o Teorema de Lumer-Phillips para o operador $-A_\lambda = -(\lambda + A)$.

Passo 1: Usar a desigualdade de Gårding para mostrar que $-A_\lambda$ é dissipativo.

Passo 2: Escrever a equação $(\lambda - A)u = u_0$ na forma fraca:

$$\langle(\lambda - A)u, v\rangle_m = \langle u_0, v\rangle_m, \quad v \in H_0^m(\Omega).$$

Passo 3: Usar o adjunto formal A^* de A para definir a forma bilinear

$$B(u, v) := \langle u, (\lambda - A^*)v\rangle_m, \quad u, v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Passo 4: Verificar que B é limitada (e se estende a $H_0^m(\Omega)$) e coerciva (Gårding de novo).

Passo 5: Usar o Lax-Milgram para encontrar uma solução fraca u.

Passo 6: Usar a elipticidade para garantir que u é uma solução clássica. $\square$

Equações de Difusão em Variedades Compactas

Fixemos M uma variedade Riemanniana, compacta e orientável.

Definição (Operadores Diferenciais em Variedades)

Seja a um 2-tensor simétrico em M. Dizemos que A é um **operador diferencial de 2a ordem** se, em coordenadas locais $(U, x_1, \ldots, x_N)$, podemos escrever

$$A = a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b^j \in C^\infty(U).$$

Para a definição acima ser mais precisa, precisamos dizer como se comportam os coeficientes sob mudanças de coordenadas.

Transformando $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (y_1, \ldots, y_N)$, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Derivando de novo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} &= \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_l}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\
&= \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 y_k}{\partial y_l \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_k}\right] \\
&= \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_l}\right)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_k} \\
&= \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_k},
\end{aligned}$$

Então, para que A fique bem definido independentemente de sistema de coordenada, se

$$A = a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \tilde{a}^{lk}\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{b}^k \frac{\partial}{\partial y_k},$$

devemos exigir que

$$\tilde{a}^{lk} = a^{ij}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \tilde{b}^k = a^{ij}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + b^j \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

Definição

Dizemos que A é **estritamente elíptico** se existe $c > 0$ tal que

$$a_x(\xi, \xi) \geq c \left|\xi\right|^2, \quad x \in M, \xi \in T_x M.$$

Teorema (Existência e Regularidade de Soluções)

Seja A um operador estritamente elíptico de 2a ordem. Então, para toda $u_0 \in C^\infty(M)$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Au = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^\infty((0, \infty) \times M)$.

Demonstração: A ideia da demonstração é essencialmente a mesma: mostrar que A satisfaz as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips e, portanto, é gerador de um semigrupo de contrações. Consideraremos

$$A : C^\infty(M) \subseteq C(M) \to C(M).$$

Passo 1: *A dissipativo*. Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $\mu > 0$. Seja x_0 ponto de máximo de f. Escolhido um sistema de coordenadas em torno de x_0, a matriz $(a^{ij}(x_0))$ é simétrica e positiva, logo, equivalente a uma matriz diagonal com autovalores positivos. Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que

$$a^{ij}(x_0) = \lambda_j \delta_{ij}, \quad \lambda_j \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{1}{\mu}A\right) f(x_0) &= f(x_0) - \frac{1}{\mu}Af(x_0)\\ &= f(x_0) - \frac{1}{\mu}b^j(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) - \frac{1}{\mu}\lambda_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0)\\ &\geq f(x_0) = \|f\|\end{aligned}$$

e tomando o supremo do lado esquerdo, vemos que $\left\|\left(I - \frac{1}{\mu}A\right) f\right\| \geq \|f\|$. Repetindo o mesmo argumento para um ponto de mínimo, concluímos que

$$\max_x \left(I - \frac{1}{\mu}A\right) f \geq \|f\| \geq \min_x \left(I - \frac{1}{\mu}A\right) f(x).$$

Passo 2: *Para que* $(\lambda - \overline{A})$ *seja sobrejetora, basta que* $R(\lambda - A) \supseteq C^\infty(M)$, *onde* $\bar{A}$ *é a menor extensão fechada de* A.

Segue do fato que

$$D(\overline{A}) = \{v \in C(M) : \exists f \in C(M) \text{ tal que para cada sequência } (v_n) \subseteq D(A) = C^\infty(M), \text{ se } v_n \to v, Av_n \to f\}.$$

Passo 3: *Para* $\lambda > 0$ *grande, a equação* $(\lambda - A)u = g$ *tem solução, para toda* $g \in C^\infty(M)$.

Tome um atlas finito $\mathcal{A} = (U_n)$ formado por sistemas de coordenadas e uma partição da unidade (ρ_n) estritamente subordinada a $\mathcal{A}$. Consideremos as equações restritas

$$(\lambda - A)u = \rho_n g \text{ em } C^\infty(U_n).$$

Como $\mathcal{A}$ é finito, existe λ grande o suficiente tal que todas as equações anteriores têm soluções suaves $u_n \in C_0^\infty(U_n)$. Como cada u_n se anula na fronteira de U_n, a extensão de u_n para M

$$u_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in U_n \\ 0, & x \notin U_n \end{cases}$$

é *contínua*. Então, $u := \sum u_n$ é contínua e solução distribucional da equação

$$(\lambda - A)u = \sum \rho_n g = g,$$

e como A é estritamente elíptico, $u \in C^\infty(M)$. □

O Laplaciano em uma Variedade Riemanniana

Exemplo

O jeito mais comum para se definir o operador de Laplace-Beltrami (a.k.a. o laplaciano (~~dos geômetras~~) positivo) em uma variedade é considerando a derivada exterior d agindo em formas

$$C^\infty(M) = \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^N(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$$

e sua aplicação adjunta $\mathrm{d}^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$. Definimos

$$\Delta := \mathrm{d}^*\,\mathrm{d} + \mathrm{d}\,\mathrm{d}^*.$$

Exemplo (continuação)

Em funções:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : C^\infty(M) &\to \Omega^1(M), \\ f &\mapsto \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \end{aligned}$$

Definimos $\Delta := \mathrm{d}^*\,\mathrm{d}$. Então,

$$\Delta f = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right),$$

onde os Γ_{ij}^k dependem dos coeficientes da métrica e das suas primeiras derivadas.

Observação

- **A solução depende da métrica?** Precisamos da métrica para definir um operador estritamente singular na desigualdade

$$a_x(\xi,\xi) \geq c\,|\xi|^2, \quad x \in M,\, \xi \in T_xM.$$

Mas no final das contas, como a variedade é compacta, todas as métricas são Lipschitz equivalentes e a solução não depende da métrica.

Outra Observação

- **Dá pra estender pro caso não compacto?**
  Não sei, mas essas ideias falham em alguns lugares:
  - A solução agora depende da métrica.
  - Saímos das hipóteses da Desigualdade de Gårding.
    No caso $L^2(\mathbb{R}^N)$: Supondo que A tem ordem 2 e que os coeficientes satisfazem

    $$\max\left(\sup_{\mathbb{R}^N}|a^{ij}|, \sup_{\mathbb{R}^N}|b^j|, \sup_{\mathbb{R}^N}|c|, \sup_{\mathbb{R}^N}\left|a^{ij}_{x_k}\right|, \sup_{\mathbb{R}^N}\left|b^j_{x_k}\right|, \sup_{\mathbb{R}^N}\left|a^{ij}_{x_l x_k}\right|\right) < \infty,$$

    pelas infinitas integrações por partes, nossa demonstração funciona!
  - $C(M)$ para de ser apropriado para tratar o problema. Acrescenta dificuldade de linguagem.

Pra terminar...

Moral da História

- Semigrupos são úteis para resolver EDPs.
- Resolver equações de difusão segue o procedimento:
  1. Achar uma cota inferior para $\|\lambda - A\|$.
  2. Resolver $(\lambda - A)u = f$ (Lax-Milgram, imersão compacta).
  3. Regularidade da solução (solução fundamental).
- Trocar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ para variedade compacta não faz grande diferença.
- Mas tirar a compacidade deixa tudo mais complicado.