Equações Parabólicas - Teoria L^2 e Equação da Onda

Patrícia Neves de Araújo
Disciplina: Teoria espectral dos operadores nos espaços de Banach

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

26 de junho de 2020

Sumário

Notações

- $x = (x_1, \cdots, x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n$;
- $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ é um multi-índice, onde α_i é um inteiro não negativo para todo i e definimos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

e

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n};$$

- Denotamos ainda $D_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ e $D = (D_1, \cdots, D_n)$. Assim escrevemos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}.$$

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ com borda $\partial\Omega$ e fecho $\overline{\Omega}$. Assumiremos que $\partial\Omega$ é de classe C^k.
Denotamos por $C^m(\Omega)$(ou $C^m(\overline{\Omega})$) o conjunto das funções m vezes continuamente diferenciáveis com valores reais (ou possivelmente complexos) em Ω (ou $\overline{\Omega}$)).
$C_0^m(\Omega)$ é o conjunto das funções de $C^m(\Omega)$ que têm suporte compacto em Ω.

- Para $u \in C^m(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$ definimos

$$||u||_{m,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Se $p = 2, u, v \in C^m(\Omega)$ definimos ainda

$$(u, v)_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx.$$

- $\tilde{C}_p^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : ||u||_{m,p} < \infty\}$
- $W^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ são os completamentos na norma $||\cdot||_{m,p}$ de $\tilde{C}_p^m(\Omega)$ e $C_0^m(\Omega)$ respectivamente.
- $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.
- $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,r}(\Omega)$ para $1 \leq r \leq p$.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado com borda $\partial\Omega$ suave;
- Consideramos o operador diferencial de ordem $2m$

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

onde $a_\alpha(x)$ são funções suficientemente suaves de $\overline{\Omega}$ a valores complexos.

- Chamaremos *parte principal* $A'(x, D)$ de $A(x, D)$ o operador

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Definição

O operador $A(x, D)$ é fortemente elíptico se existe $c > 0$ tal que

$$Re(-1)^m A'(x, \xi) \geq c|\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema (2.2)

Desigualdade de Gårding: Se $A(x, D)$ é um operador fortemente elíptico de ordem $2m$, então existem constantes $c_0 > 0$ e $\lambda_0 \geq 0$ tais que para todo $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ temos

$$Re(Au, u)_0 \geq c_0||u||^2_{m,2} - \lambda_0||u||^2_{0,2}. \tag{1}$$

A demonstração deste teorema é usualmente baseada na definição da elipticidade forte e no uso da Transformada de Fourier e pode ser encontrada em Folland [Fol95].

Exemplo

O operador $-\Delta$ definido por

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

é fortemente elíptico. Para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$(-\Delta u, u)_0 = -\int_\Omega u \Delta u dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx = ||u||_{1,2}^2 - ||u||_{0,2}^2. \quad (2)$$

Utilizando as derivadas fracas podemos mostrar que (2) vale para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e logo (1) vale para $-\Delta$.

Se $A(x,D)$ é um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ com coeficientes $a_\alpha(x)$ suaves em $\overline{\Omega}$, podemos utilizar integração por partes para estender $(Au+\lambda u,u)_0$ para uma forma sesquilinear contínua em $H_0^m(\Omega)\times H_0^m(\Omega)$.
Se $Re\lambda \geq \lambda_0$, pela desigualdade de Gårding, a forma sesquilinear correspondente é coerciva.
Aplicando o Lema de Lax-Milgram obtemos a existência de uma única solução $u\in H_0^m(\Omega)$ do problema de valor de contorno

$$A(x,D)u+\lambda u=f$$

para todo $f\in L^2(\Omega)$ e $Re\lambda \geq \lambda_0$ (ver [Bre10]).
É possível provar que $u\in H^{2m}(\Omega)$ (ver [RRM$^+$98]).

Teorema (2.3)

Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$. Então para todo λ tal que $Re\lambda \geq \lambda_0$ e para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe única $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ satisfazendo a equação

$$A(x, D)u + \lambda u = f.$$

Ao operador $A(x, D)$ em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ associamos um operador ilimitado A agindo no espaço de Hilbert $H = L^2(\Omega)$.

Definição (4.1)

Seja $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ *um operador fortemente elíptico em* Ω *e defina* $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. *Para todo* $u \in D(A)$ *defina*

$$Au = A(x,D)u.$$

Teorema (2.5)

Seja $H = L^2(\Omega)$ *e seja* A *o operador definido acima. Para todo* λ *satisfazendo* $Re\lambda \geq \lambda_0$ *o operador* $-A_\lambda = -(A + \lambda I)$ *é o gerador infinitesimal de um* C_0-*semigrupo de contrações em* H.

Demonstração: $D(A_\lambda) = D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. Temos que $D(A_\lambda) \supset C_0^\infty(\Omega)$. Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em H, logo $D(A_\lambda)$ também é denso em H.

Daí, pela elipticidade forte de $A(x, D)$ a desigualdade de Gårding implica em

$$Re(-A_\lambda u, u)_0 \leq -c_0||u||_{m,2}^2 + (\lambda_0 - Re\lambda)||u||_{0,2}^2.$$

Como $Re\lambda \geq \lambda_0$, $Re(-A_\lambda u, u) \leq 0$ e assim $-A_\lambda$ é dissipativo. Tome $f \in H$ e considere

$$(\mu I + A_\lambda)u = f \Rightarrow (\mu + \lambda)u + Au = f.$$

Essa equação tem solução em $D(A_\lambda)$ para todo $\mu > 0$ e $f \in H$ por consequência do teorema (2.3).

Utilizamos então o Teorema de Lumer-Phillips, parte (1), para concluir que $-A_\lambda$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $H = L^2(\Omega)$. $\square$

Corolário (2.6)

Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado com borda suave $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$. Para todo $u_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + A(x,D)u(t,x) = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

tem solução unica $u(t,x) \in C^1([0,\infty), H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega))$.

Teorema (2.7)

Se $A(x, D)$ é um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ então o operador $-A$ associado a $A(x, D)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores em $H = L^2(\Omega)$.

Demonstração: Pelo teorema (2.5), $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $H = L^2(\Omega)$ (para mais informações, ver [Bre13]). Pela definição de $(\quad , \quad)_0$ e pela desigualdade de Gårding sabemos que

$$Re(A_{\lambda_0}, u)_0 \geq c_0 || u^2_{m,2}. \tag{3}$$

Para $u \in D(A_{\lambda_0})$, uma integração por partes nos leva a

$$|im(A_{\lambda_0} u, u)_0| \leq |(A_{\lambda_0} u, u)_0| \leq b||u||^2_{m,2} \tag{4}$$

para alguma constante $b > 0$. Neste momento utilizamos a definição de *imagem numérica*.

Definição

A *imagem numérica* de um operador é definida por

$$S(A) = \{ < x^*, Ax >: x \in D(A), ||x|| = 1, \\ x^* \in X^*, ||x^*|| = 1, < x, x^* >= 1\}.$$

Assim, utilizando as estimativas obtidas anteriormente, temos $S(A_{\lambda_0}) \subset S_{\eta_1} = \{\lambda : -\eta_1 < arg\lambda < \eta_1\}$ onde $\eta_1 = arctan\left(\frac{b}{c_0}\right) < \frac{\pi}{2}$. Escolhendo η tal que $\eta_1 < \eta < \frac{\pi}{2}$ e denotando $\Sigma_\eta = \{\lambda : |arg\lambda| > \eta\}$ existe uma constante tal que

$$d(\lambda, \overline{S(A_{\lambda_0})}) \geq C_\eta |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\eta$$

onde $d(\lambda, S)$ denota a distância entre λ e o conjunto $S \subset \mathbb{C}$.

Tome $\mu < 0$ e considere $A_{\lambda_0} - \mu I = A + (\lambda_0 - \mu)I$. Pelo teorema (2.3) o conjunto $\{\mu : \mu < 0\}$ está contido no resolvente de A_{λ_0}. Utilizaremos então o teorema (1.3.9) do livro de Pazy [Paz12].

Teorema (1.3.9)

Sejam A um operador linear fechado com $D(A)$ denso em X, $S(A)$ a imagem numérica de A e $\Sigma = \overline{S(A)}^c$ em $\mathbb{C}$. Se $\lambda \in \Sigma$ então $\lambda I - A$ tem imagem fechada e é bijetor. Além disso, se Σ_0 é uma componente de Σ tal que $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, então $\sigma(A)$ está contido em $S_0 = (\Sigma_0)^c$ e

$$||R_\lambda(A)|| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{S(A)})}.$$

Vimos que $\rho(A_{\lambda_0}) \cap \Sigma_\eta \neq \emptyset$. Assim, Σ_η é uma componente de $\Sigma = \overline{S(A_{\lambda_0})}^c$ com interseção não vazia com $\rho(A)$. Portanto, pelo teorema (1.3.9), $\sigma(A_{\lambda_0})$ está contido em $(\Sigma_\eta)^c$, ou seja, $\rho(A_{\lambda_0}) \supset \Sigma_\eta$. Além disso, para todo $\lambda \in \Sigma_\eta$,

$$||R_\lambda(A_{\lambda_0})|| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{S(A_{\lambda_0})})} \leq \frac{1}{C_\eta|\lambda|}.$$

Utilizaremos então o teorema (2.5.2) do livro de Pazy.

Teorema (2.5.2)

Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo uniformemente limitado. Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$ e assuma $0 \in \rho(A)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $T(t)$ pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z : |argz| < \delta\}$ e $||T(t)||$ é uniformemente limitado em cada subsetor $\overline{\Delta_{\delta'}}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ.

b) Existe C constante tal de para todo $\sigma > 0, \tau \neq 0$,

$$||R_{\sigma+i\tau}(A)|| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

Teorema (2.5.2)

c) Existe $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $M > 0$ *tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

e $||R_\lambda(A)|| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$ *para* $\lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0.$

d) $T(t)$ *é diferenciavel para* $t > 0$ *e existe constante* C *tal que* $||AT(t)|| \leq \dfrac{c}{t}$ *para* $t > 0.$

Observe que pelo Lema de Lax-Milgram $0 \in \rho(A)$. Além disso, como $\rho(A) \supset \Sigma_\eta$, $\rho(A)$ satisfaz as condições apresentadas no item (c). Assim, o teorema (2.5.2) implica que $-A_{\lambda_0}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Corolário (3.2.2)

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Se B é um operador linear limitado então $A + B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Pelo corolário acima, $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores em $L^2(\Omega)$. $\square$

Consideremos então o seguinte resultado.

Corolário (4.3.3)

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$. Se $f \in L^1((0,T),X)$ é localmente Hölder contínua em $(0,T)$, então para todo $x \in X$ o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem solução única u.

Como consequência do teorema (2.7) e do corolário (4.3.3), temos:

Corolário (2.8)

Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $f(t, x) \in L^2(\Omega)$ para todo $t \geq 0$. Se

$$||f(t) - f(s)||_2^2 = \int_\Omega |f(t, x) - f(s, x)|^2 dx \leq K|t - s|^{2v}$$

então para todo $u_0(x) \in L^2(\Omega)$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(x, D)u = f(t, x) \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

tem solução única $u(t, x) \in C^1((0, \infty), H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega))$.

Observação: Se o operador A tem coeficientes constantes, os teoremas (2.5) e (2.7) valem para $\Omega = \mathbb{R}^n$. As provas para este caso particular podem ser realizadas usando a Transformada de Fourier.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_1(x); \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_2(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

Esse problema equivale ao sistema de primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, com $\begin{cases} u_1(0,x) = u_1(x) \\ u_2(0,x) = u_2(x) \end{cases}$.

Estamos interessados em mostrar que $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores em um espaço de Banach apropriado, que será $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, as funções $H^k(\Omega)$ podem ser definidas utilizando a Transformada de Fourier.

Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

sua Transformada de Fourier. A função $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Dado $U = [u_1, u_2] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos a norma

$$|||u||| = |||[u_1, u_2]||| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^2 + |\nabla u_1|^2 + |u_2|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com respeito à norma $||| \cdot |||$ é o espaço de Hilbert $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição

Seja $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$. Para $U = [u_1, u_2] \in D(A)$ definimos

$$AU = A[u_1, u_2] = [u_2, \Delta u_1].$$

Lema (4.2)

Se $\nu > 0$ *e* $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$, *então existe única função* $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo*

$$u - \nu \Delta u = f \tag{6}$$

Lema (4.3)

Para toda $F = [f_1, f_2] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ *a equação*

$$U - \lambda AU = F \tag{7}$$

tem única solução $U = [u_1, u_2] \in H^k(\mathbb{R}^n) \times H^{k-2}(\mathbb{R}^n), \forall k \geq 2$. *Além disso,*

$$|||u||| \leq (1 - 2|\lambda|)^{-1}|||F|||$$

para $0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$.

Ideia da demonstração: considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e w_1, w_2 soluções de

$$w_i - \lambda^2 \Delta w_i = f_i$$

$i = 1, 2$. Pelo lema (4.3) as soluções existem e $w_1, w_2 \in H^k(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \geq 0$. Definimos $u_1 = w_1 + \lambda w_2$ e $u_2 = w_2 + \lambda \Delta w_1$. $U = [u_1, u_2]$ é solução de (7). Usando as estimativas das normas de u_1 e u_2 obtemos a desigualdade desejada.

Corolário (4.4)

Para todo $F \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ e λ real tal que $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{2}$ a equação

$$U - \lambda A U = F$$

tem solução única $U = [u_1, u_2] \in H^k(\mathbb{R}^n) \times H^{k-2}(\mathbb{R}^n), \forall k \geq 2$. Além disso,

$$|||u||| \leq (1 - 2|\lambda|)^{-1} |||F|||.$$

Teorema (4.5)

O operador A da definição (4.1) é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo em $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$||T(t)|| \leq e^{2|t|}. \tag{8}$$

Demonstração: $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em H. Pelo corolário (4.4) o operador $(\mu I - A)^{-1}$ existe para $|\mu| > 2$ e satisfaz

$$||(\mu I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{|\mu| - 2} \text{ para } |\mu| > 2.$$

Utilizaremos então o teorema (1.6.3) de Pazy.

Teorema (1.6.3)

A é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores limitados $T(t)$ satisfazendo $||T(t)|| \leq Me^{\omega|t|}$ se e somente se
a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$ e
b) Todo real λ, $|\lambda| > \omega$ está em $\rho(A)$ e para tal λ temos

$$||R_\lambda(A)^n|| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Pelo Teorema (1.6.3), A é o gerador infinitesimal de um grupo T(t) satisfazendo (8). $\square$

Corolário (4.5)

Para todas $f_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $f_2 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *existe uma única* $u(t,x) \in C^1([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n))$ *satisfazendo o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \\ u(0,x) = f_1(x) \\ u_t(0,x) = f_2(x). \end{cases}$$

Demonstração: Seja $T(t)$ o semigrupo gerado por A e defina $[u_1(t,x), u_2(t,x)] = T(t)[f_1(x), f_2(x)]$. Daí

$$\frac{\partial}{\partial t}[u_1, u_2] = A[u_1, u_2] = [u_2, \Delta u_1]$$

e u_1 é a solução desejada. $\square$

Teorema

Para $0 \leq m < k - \dfrac{n}{2}$ *temos* $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$.

Consideramos então o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \\ u(0,x) = f_1(x) \\ u_t(0,x) = f_2(x). \end{cases}$$

com $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pela regularidade de f_1 e f_2, $[f_1, f_2] \in D(A^k)$ para todo $k \geq 1$. Daí $[u_1, u_2] = T(t)[f_1, f_2] \in D(A^k)$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $\Delta^k u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \geq 0$, o que implica que $u_1 \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema anterior, $u_1(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

[Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[Bre13] A. Bressan. *Lecture Notes on Functional Analysis: With Applications to Linear Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2013.

[Fol95] G.B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Mathematical Notes. Princeton University Press, 1995.

[Paz12] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.

[RRM+98] B.D. Reddy, D.D. Reddy, J.E. Marsden, L. Sirovich, M. Golubitsky e W. Jager. *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Introductory Functional Analysis Series. Springer, 1998.