Valores singulares de operadores compactos

Patrícia Muñoz Ewald
ewald@ime.usp.br

Universidade de São Paulo

3 de julho de 2020

Plano

Por que estudar valores singulares?

- Estudar operadores compactos não autoadjuntos, ou seja, sem teorema espectral.
- Definição dos operadores tipo traço, que trazem aplicações interessantes (por exemplo, em física matemática).

Definições e convenções

- H será sempre um espaço de Hilbert, não necessariamente separável.
- A será sempre um operador compacto e $B_0(H)$ é o espaço dos operadores compactos.
- $F(H)$ denota os operadores de rank finito, onde $\text{rank}(A) = \dim \mathit{Im}\, A$.
- Sequências podem ser finitas.
- Um sistema ortonormal em H é uma sequência $(\varphi_j)_j \subseteq H$ de vetores ortonormais que não precisa constituir base.
- A sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ de autovalores de um operador será sempre tal que $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$, eles são repetidos de acordo com multiplicidade, e se necessário a sequência é completada por zeros.

Lembretes sobre operadores limitados e compactos

- Um operador $B \in B(H)$ será dito não-negativo ou positivo se for autoadjunto e $\langle Bx, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$.
- Se $B \in B(H)$, $\|B\| = \|B^*\|$.
- $B_0(H)$ é um ideal fechado de $B(H)$.
- A^*A é um operador positivo e compacto.

Proposição (Descrição min-max dos autovalores)

Seja A um operador compacto e positivo e $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ sua sequência de autovalores. Então

$$\lambda_j = \min_{\substack{M \\ \dim M = j-1}} \max_{\substack{x \perp M \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle.$$

Definição

Seja $A \in B_0(H)$, seu j-ésimo **valor singular** é

$$s_j(A) = (\lambda_j(A^*A))^{\frac{1}{2}},$$

e chamaremos de $\nu(A)$ o número de valores singulares não nulos de A, que pode ser finito ou infinito.

Como $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$, temos equivalentemente

$$s_j(A) = \min_{\substack{M \\ \dim M = j-1}} \max_{\substack{x \perp M \\ \|x\|=1}} \|Ax\|^2 .$$

Exemplo

Considere o operador $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por

$$Vf(t) = -2i \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Podemos escrever $Vf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$ com

$$k(t,s) = \begin{cases} -2i, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 0, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

e V é compacto. Mostrarei que além disso V não tem autovalores.

Exemplo (Continuação)

Suponha que $\varphi(t) \in L^2([0,1])$ tal que $V\varphi = \lambda\varphi$, então

$$\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{i\lambda}{2}\varphi(t),$$

de forma que

$$\varphi(t) = \frac{i\lambda}{2}\varphi'(t), \quad \varphi(0) = 0,$$

e daí temos que $\varphi(t) = 0$.
No entanto, podemos mostrar que

$$s_j(V) = \frac{4}{(2j-1)\pi}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Teorema (Representação de Schmidt)

Um operador compacto A admite representação da forma

$$A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j(A)\langle \cdot, \varphi_j \rangle \psi_j,$$

onde $(\varphi_j)_j^{\nu(A)}$ *e* $(\psi_j)_{j=1}^{\nu(A)}$ *são sistemas ortonormais, e a sequência converge na norma de operador. Além disso, se escrevemos*

$$B = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \psi_j,$$

onde $(\varphi_j)_j^{\nu}$ *e* $(\psi_j)_{j=1}^{\nu}$ *são sistemas ortonormais e* $(\alpha_j)_{j=1}^{\nu}$ *é uma sequência não cresceste de números reais positivos tal que* $\alpha_j \to 0$*, então B é um operador compacto e* $s_j(B) = \alpha_j$ *são seus valores singulares.*

Representação de Schmidt: demonstração

Vamos rascunhar a demonstração. Escreverei $s_j := s_j(A)$.
Do teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, temos que

$$A^*A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j^2 \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

onde $(\varphi_j)_{j=1}^{\nu(A)}$ é um sistema ortonormal em H.
Tome $\psi_j = s_j^{-1} A\varphi_j$, e note que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_j, \psi_k \rangle &= s_j^{-1} s_k^{-1} \langle A\varphi_j, A\varphi_k \rangle \\
&= s_j^{-1} s_k^{-1} \langle A^*A\varphi_j, \varphi_k \rangle \\
&= s_j s_k^{-1} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \\
&= \delta_{jk}.
\end{aligned}$$

Tendo $(\varphi_j)_{j=1}^{\nu(A)}$ e $(\psi_j)_{j=1}^{\nu(A)}$ como candidatos, vamos mostrar que

$$Ax = \sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j.$$

Note que para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j + u,$$

com $u \in \ker A^* A$. Como $\ker A^* A = \ker A$ e $A\varphi_j = s_j \psi_j$, basta aplicar A e temos a forma desejada.
A convergência segue considerando as somas parciais $A_n = \sum_{j=1}^{n} s_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \psi_j$ e notando que $s_j \to 0$.

Falta ainda mostrar a outra parte do teorema, mas note o que mostramos!

SVD

A representação de Schmidt é análoga à decomposição em valores singulares (SVD) de uma matriz em dimensão finita.

Claro, pois $A^*A\varphi_j = s_j^2\varphi_j$ e

$$\begin{aligned} AA^*\psi_j &= AA^*(s_j^{-1}A\varphi_j) = s_j^{-1}A(A^*A\varphi_j) \\ &= s_j^{-1}s_j^2 A\varphi_j \\ &= s_j^2\psi_j. \end{aligned}$$

Ou seja...

Nós temos uma descrição de A em termos dos autovetores e autovalores de A^*A e AA^*.

Agora, a outra parte da demonstração. Para

$$B = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \psi_j,$$

se $\nu < \infty$, então B tem rank finito e portanto é compacto. Se $\nu = \infty$, consideremos as somas parciais B_n, teremos que $B_n \to B$, logo B é compacto.
Para checar que $s_j(B) = \alpha_j$, basta escrever B^*B em forma de série e utilizar as hipóteses sobre os α_j: que $\alpha_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e estão ordenados como queremos.

$\square$

Corolário

Um operador compacto A e seu adjunto A^* possuem os mesmos valores singulares.

Proposição

Seja A compacto e B, C operadores limitados em H. Então

$$s_j(BAC) \leq \|B\| \, \|C\| \, s_j(A).$$

Corolário

Para uma projeção ortogonal P em H temos

$$s_j(PA|_{ImP}) \leq s_j(A).$$

Proposição

Seja A compacto, $n \geq 1$ e $(\varphi_j)_{j=1}^n$ um sistema ortonormal em H. Então

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Proposição

Sejam A e B operadores compactos, então para cada $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B).$$

Teorema

Podemos caracterizar os valores singulares de um operador compacto A em H por

$$s_j(A) = \min\{\|A - B\| : B \in F(H), \operatorname{rank} B < j\}.$$

Prova: Tome B com $\operatorname{rank} B = m < j$, então $\dim(\ker B)^\perp = m$, e temos

$$s_j(A) \leq s_{m+1}(A) \leq \max_{\substack{x \in \ker B \\ \|x\|=1}} \|(A - B)x\| \leq \|A - B\|$$

Para provar que o mínimo é atingido e é $s_j(A)$: se $j > \nu(A)$, então $s_j(A) = 0 = \|A - A\|$, colocando $B = A$. Se $j \leq \nu(A)$, escolha uma rep. de Schmidt de A e tome B_j a soma parcial até $j - 1$. Então $\operatorname{rank} B_j = j - 1$ e

$$\|A - B_j\| \leq s_j(A). \quad \square$$

Valores de aproximação

Teorema

Podemos caracterizar os valores singulares de um operador compacto A em H por

$$s_j(A) = \min\{\|A - B\| : B \in F(H), \operatorname{rank} B < j\}.$$

Valores de aproximação

Essa caracterização será utilizada para definir valores singulares para operadores limitados e em espaços de Banach.

Corolário

Para operadores compactos A e B em H,

$$|s_j(A) - s_j(B)| \leq \|A - B\|.$$

Autovalores e valores singulares em dimensão finita

Seja $H = \mathbb{C}^m$ e A um operador em H. Então

$$\prod_{j=1}^{m} |\lambda_j(A)| = \prod_{j=1}^{m} s_j(A),$$

pois $\prod_{j=1}^{m} s_j(A)^2 = \det A^*A = \left|\det A\right|^2 = \prod_{j=1}^{m} \left|\lambda_j(A)\right|^2$. Além disso,

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A), \quad n = 1, \ldots, m-1.$$

Isso caracteriza completamente a relação entre (λ_j) e (s_j).

Voltando para dimensão arbitrária...

Teorema

Para um operador compacto A em H vale, para cada $n \geq 1$,

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Esboço da prova: use o lema de Schur para obter um subespaço M de dimensão $n < \infty$ apropriado (invariante), a relação do slide anterior $\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| = \prod_{j=1}^{n} s_j(A)$ em M, e o fato de que $s_j(A|_M) \leq s_j(A)$.

Um lema útil...

...porém técnico e pouco elucidativo.

Lema

Seja $\varphi = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ uma função diferenciável a valores reais em um aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e seja Ω um subconjunto convexo de D tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \geq \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \geq \cdots \geq \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(t) \geq 0, \quad t \in \Omega.$$

Se $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ são pontos em Ω tais que $\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_j$ para $k = 1, \dots, n$, então $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Teorema anterior + este lema + funções exp e log = desigualdades úteis.

Proposição

Para $A \in B_0(H)$, *e* $\lambda_j := \lambda_j(A)$, $s_j := s_j(A)$,

1. *Para* $n \geq 1$ *e* $p > 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p\,;$$

2. *Para* $n \geq 1$ *e* $r > 0$,

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + r\,|\lambda_j|) \leq \prod_{j=1}^{n} (1 + r \cdot s_j)\,;$$

3. *Para* $n \geq 1$ *e* $r \geq n$,

$$\sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_n \leq r} |\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n}| \leq \sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_n \leq r} s_{j_1} \cdots s_{j_n}.$$

Operadores de tipo traço

Definição

Definimos o espaço dos **operadores de tipo traço** como

$$S_1 = \left\{ A \in B_0(H) : \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \right\},$$

com norma

$$\| \cdot \|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\cdot).$$

- S_1 é um espaço de Banach.
- Relativo a essa norma, $F(H)$ é denso em S_1.
- Se H for separável, S_1 também será.
- Os operadores tipo traço formam um ideal de $B(H)$.

O traço

A partir daqui, H será **separável**. O traço de um operador em S_1 pode ser definido a partir de sua definição em operadores de rank finito e de argumentos de continuidade, ou diretamente em uma base ortonormal $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle.$$

Se $A \in S_1$, o traço independe da escolha de base de H. Não é trivial mostrar que

Teorema (Lidskii)

se A for um operador de tipo traço, então

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(A).$$

Exemplo

Para o operador integral que vimos no começo, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 0$, mas $\sum_{j=1}^{\infty} s_j(V) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(2j-1)\pi} \to \infty$, logo não é de tipo traço.

Mesmo sem calcular $s_j(V)$ podemos concluir do teorema de Lidskii que V não é de tipo traço. Tome a base trigonométrica $f_n(t) = \cos(2\pi nt)$, $g_n(t) = \sin(2\pi nt)$. Então

$$Vf_n = \frac{-ig_n}{\pi n}, \;\; Vg_n = \frac{i(f_n - 1)}{\pi n}, \;\; (Vf_0)(t) = -2it.$$

Assim temos

$$\langle Vf_0, f_0 \rangle = -i, \;\; \langle Vf_n, f_n \rangle = 0, \text{para } n > 0, \;\; \langle Vg_n, g_n \rangle = 0,$$

de forma que o traço de V nessa base é $\operatorname{tr} V = -i \neq 0$.

Operadores de Hilbert-Schmidt

De forma muito similar aos operadores de tipo traço, definimos:

Definição

O espaço dos operadores de **Hilbert-Schmidt** é

$$S_2 = \left\{ A \in B_0(H) : \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^2 < \infty \right\},$$

com norma $\| \cdot \|_2 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\,\cdot\,)^2$.

- Definição equivalente: A é Hilbert-Schmidt se for compacto e $A^*A \in S_1$.
- S_2 é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$.
- $S_1 \subseteq S_2$.
- S_2 é um ideal em $B(H)$; $F(H)$ é denso em S_2.

Exemplo

Tome agora $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ tal que

$$Vf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pode-se provar que

- se $k(t,s) \in L^2([0,1] \times [0,1])$, então $V \in S_2$.
- se $k(t,s) \in C([0,1] \times [0,1])$ e $V \geq 0$, então $V \in S_1$.

Lembrando um seminário anterior...

Definição

Seja $B : X \to X$ um operador limitado em um espaço de Banach X e seja λ_0 um autovalor de B. Um conjunto ordenado $\{x_0, \ldots, x_r\}$ é chamado de uma **cadeia de Jordan** de B em λ_0 se $x_0 \neq 0$ e

$$Bx_0 = \lambda_0 x_0,$$

$$Bx_j = \lambda_0 x_j + x_{j-1}, \;\; j = 1, \ldots, r.$$

Então x_0 é um autovetor de B e $x_1, \ldots, x_r$ são ditos **autovetores generalizados** de B.

Chamaremos de E_B o menor subespaço fechado de H que contém todos os autovetores e autovetores generalizados de B correspondentes a autovalores não nulos.

O problema de completude

Um operador compacto A em H tem um **sistema completo de autovetores e autovetores generalizados** quando o menor subespaço de H que contém todos os autovetores e autovetores generalizados (incluindo aqueles com autovalor zero!) é denso em H.

Para ser mais fácil, direi que A é "completo".

- Não é verdade para operadores compactos em geral, vide operadores de Volterra ($\sigma(A) = \{0\}$).
- É sempre verdade para operadores compactos e autoadjuntos, pelo teorema espectral.

Dois resultados de completude

Teorema

Se A for um operador de tipo traço tal que $\Im A = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ é não-negativo, então A é completo.

Teorema

Se A for um operador de Hilbert-Schmidt tal que $\Re A = \frac{1}{2}(A + A^*)$ e $\Im A = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ são operadores não-negativos, então A é completo.

Ambas as demonstrações envolvem o lema de Schur e resultado intermediário:
Se $\Im A \geq 0$, então A é completo se, e somente se, $E_A^{\perp} \subseteq \ker A$.

Resumindo

- Valores singulares são $s_j(A) = (\lambda_j(A^*A))^{\frac{1}{2}}$.
- Representação útil de operadores compactos análoga à *singular value decomposition* para matrizes.
- Permite definir operadores tipo traço e Hilbert-Schmidt,
- que por sua vez nos dão mais classes de operadores completos.
- Permite definição do traço.

Generalizações

Lembrete

Podemos caracterizar os valores singulares de um operador compacto A em H por

$$s_j(A) = \min\{\|A - B\| : \operatorname{rank} B < j\}.$$

Não utiliza produto interno nem faz menção aos autovalores de A^*A.

- Valores singulares para operadores limitados. [2, §XI.10]
- Operadores nucleares em espaços de Banach. [3, 4, 5]

Mais generalizações e aplicações

- Generalização de S_1 e S_2: operadores de Schatten, [3, 5]
  - $\|A\|_p = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^p$.
  - Espaços de Banach.
  - Ideais.
- Correspondência de Calkin, identificação entre espaços de sequências e ideais em $B(H)$: [5]

$B(H)$	ℓ_∞
$B_0(H)$	c_0
S_p	ℓ_p
S_1	ℓ_1
$F(H)$	c_{00}

- Aplicação para problemas de *scattering*. [4, 5]

Referências I

A referência principal foi [2, Ch. VI], e referências secundárias [2, Parte II] e [1].

Israel Gohberg and Seymour Goldberg.
Basic operator theory.
Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
Reprint of the 1981 original.

Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Marinus A. Kaashoek.
Classes of linear operators. Vol. I.
Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Nahum Krupnik.
Traces and determinants of linear operators, volume 116 of *Operator Theory: Advances and Applications*.
Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

Referências II

Peter D. Lax.
Functional analysis.
Pure and Applied Mathematics (New York).
Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

Barry Simon.
Trace ideals and their applications.
Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2005.