Autovalores de operadores compactos. Continuidade do espectro e autovalores

Luis Alberto Garcia Santisteban

Prof. Dra. Nataliia Goloshchapova

Universidade de São Paulo

São Paulo, 2020

Autovalores de operadores compactos.

Teorema 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador compacto e σ uma parte isolada de $\sigma(A)$. Se $0 \notin \sigma$ então a projeção de Riesz P_σ tem posto finito.

Autovalores de operadores compactos.

Teorema 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador compacto e σ uma parte isolada de $\sigma(A)$. Se $0 \notin \sigma$ então a projeção de Riesz P_σ tem posto finito.

Demonstração: Seja $\Gamma \subset \rho(A)$ tal que $\sigma \subset int(\Gamma)$ e $\sigma(A) \setminus \sigma \subset ext(\Gamma)$, como $0 \notin \sigma$ podemos supor que $0 \in ext(\Gamma)$. Daí,

$$P_\sigma = A \circ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} d\lambda \right).$$

Autovalores de operadores compactos.

Teorema 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador compacto e σ uma parte isolada de $\sigma(A)$. Se $0 \notin \sigma$ então a projeção de Riesz P_σ tem posto finito.

Demonstração: Seja $\Gamma \subset \rho(A)$ tal que $\sigma \subset int(\Gamma)$ e $\sigma(A) \setminus \sigma \subset ext(\Gamma)$, como $0 \notin \sigma$ podemos supor que $0 \in ext(\Gamma)$. Daí,

$$P_\sigma = A \circ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} d\lambda \right).$$

Definição 1

Sejam X um espaço de Banach e $A\colon X \to X$ um operado linear limitado. $\lambda_0 \in \sigma(A)$ é chamado um *autovalor de tipo finito* de A se X admite uma decomposição soma direta $X = M \oplus L$ tal que (i) M, L são subespaços A-invariantes (ii) $dim M < \infty$ (iii) $\sigma(A|M) = \{\lambda_0\}, \lambda_0 \notin \sigma(A|L)$.

Corolário 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto e $\lambda \in \sigma(A)$ não-nulo então λ é um autovalor de tipo finito de A.

Corolário 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto e $\lambda \in \sigma(A)$ não-nulo então λ é um autovalor de tipo finito de A.

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto. Se λ_0 é um autovalor não-nulo de A então $X = ImP_{\lambda_0} \oplus KerP_{\lambda_0}$.

Corolário 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto e $\lambda \in \sigma(A)$ não-nulo então λ é um autovalor de tipo finito de A.

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto. Se λ_0 é um autovalor não-nulo de A então $X = ImP_{\lambda_0} \oplus KerP_{\lambda_0}$.

Definição 2

(1) A dimensão da ImP_{λ_0} é chamado de *multiplicidade algebraica* do autovalor λ_0 e é denotado por $m(\lambda_0, A)$.
(2) um conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}\}$ é chamado uma *cadeia de Jordan* de A em λ_0 se $x_0 \neq 0$ e

$$A(x_0) = \lambda_0 x_0, \quad A(x_i) = \lambda_0 x_i + x_{i-1}, i = 1, \dots, r-1. \tag{1}$$

Corolário 1

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto e $\lambda \in \sigma(A)$ não-nulo então λ é um autovalor de tipo finito de A.

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operado compacto. Se λ_0 é um autovalor não-nulo de A então $X = ImP_{\lambda_0} \oplus KerP_{\lambda_0}$.

Definição 2

(1) A dimensão da ImP_{λ_0} é chamado de *multiplicidade algebraica* do autovalor λ_0 e é denotado por $m(\lambda_0, A)$.
(2) um conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ é chamado uma *cadeia de Jordan* de A em λ_0 se $x_0 \neq 0$ e

$$A(x_0) = \lambda_0 x_0, \quad A(x_i) = \lambda_0 x_i + x_{i-1}, i = 1, \ldots, r-1. \tag{1}$$

Os elementos $x_1, \ldots, x_{r-1}$ em 1 são chamados *autovetores generalizados* de A.

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto. Denote por E_A o menor subespaço fechado de H contendo todos os autovetores e autovetores generalizados de A correspondente a autovalores não-nulos de A.

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto. Denote por E_A o menor subespaço fechado de H contendo todos os autovetores e autovetores generalizados de A correspondente a autovalores não-nulos de A. A seguir

$$\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \ldots \tag{2}$$

denota a sequência (finita ou infinita) de autovalores não-nulos de A tal que:

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto. Denote por E_A o menor subespaço fechado de H contendo todos os autovetores e autovetores generalizados de A correspondente a autovalores não-nulos de A. A seguir

$$\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots \tag{2}$$

denota a sequência (finita ou infinita) de autovalores não-nulos de A tal que: (i) Cada autovalor não-nulo de A esta em 2 tantas vezes quanto o valor de sua multiplicidade algebraica.

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto. Denote por E_A o menor subespaço fechado de H contendo todos os autovetores e autovetores generalizados de A correspondente a autovalores não-nulos de A. A seguir

$$\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots \tag{2}$$

denota a sequência (finita ou infinita) de autovalores não-nulos de A tal que: (i) Cada autovalor não-nulo de A esta em 2 tantas vezes quanto o valor de sua multiplicidade algebraica.
(ii) Os autovalores são ordenados decrescente de acordo con seu valor absoluto, isto é, $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq |\lambda_3(A)| \geq \dots$

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto. Denote por E_A o menor subespaço fechado de H contendo todos os autovetores e autovetores generalizados de A correspondente a autovalores não-nulos de A. A seguir

$$\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \ldots \tag{2}$$

denota a sequência (finita ou infinita) de autovalores não-nulos de A tal que: (i) Cada autovalor não-nulo de A esta em 2 tantas vezes quanto o valor de sua multiplicidade algebraica.
(ii) Os autovalores são ordenados decrescente de acordo con seu valor absoluto, isto é, $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq |\lambda_3(A)| \geq \ldots$

Lema 1

Sejam H um espaço de Hilbert separável, $A\colon H \to H$ um operado compacto então existe uma base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ em E_A tal que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$A(\varphi_j) = a_{1j}\varphi_1 + \ldots + a_{(j-1)j}\varphi_{j-1} + \lambda_j(A)\varphi_j, \tag{3}$$

Observe que E_A é A-invariante e a matriz do operador $A|E_A$ respeito à base de E_A é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & * & * & \cdots \\ 0 & \lambda_2(A) & * & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3(A) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Observe que E_A é A-invariante e a matriz do operador $A|E_A$ respeito à base de E_A é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & * & * & \cdots \\ 0 & \lambda_2(A) & * & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3(A) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Assim se $E_A = H$ o Lema 1 mostra que H tem uma base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ tal que a matriz de A com respeito a essa base é uma matriz triangular superior com elementos não-nulos na diagonal principal.

Observe que E_A é A-invariante e a matriz do operador $A|E_A$ respeito à base de E_A é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & * & * & \cdots \\ 0 & \lambda_2(A) & * & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3(A) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Assim se $E_A = H$ o Lema 1 mostra que H tem uma base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ tal que a matriz de A com respeito a essa base é uma matriz triangular superior com elementos não-nulos na diagonal principal. Como E_A é um subespaço fechado de H então $H = E_A \oplus E_A^\perp$. Considere o operador matriz 2×2 de A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : E_A \oplus E_A^\perp \to E_A \oplus E_A^\perp \tag{5}$$

Lema 2

O operador $A_{22}\colon E_A^{\perp} \to E_A^{\perp}$ em 5 é compacto e $\sigma(A_{22}) = \{0\}$.

Lema 2

O operador $A_{22} \colon E_A^\perp \to E_A^\perp$ em 5 é compacto e $\sigma(A_{22}) = \{0\}$.

Exemplos

- $V \colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $V(f)(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$, para todo $t \in [0,1]$ tem-se que V é compacto e $\sigma(V) = \{0\}$.
- Todo operador nulo A definido num espaço normado é compacto e $\sigma(A) = \{0\}$.

Continuidade do espectro e autovalores.

Teorema 2

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador linear continuo e Ω uma vizinhança aberta de $\sigma(A)$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(B) \subseteq \Omega$ para qualquer operador linear $B\colon X \to X$ com $||A - B|| < \epsilon$.

Continuidade do espectro e autovalores.

Teorema 2

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador linear continuo e Ω uma vizinhança aberta de $\sigma(A)$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(B) \subseteq \Omega$ para qualquer operador linear $B\colon X \to X$ com $||A - B|| < \epsilon$.

Seja $\Gamma \subseteq \rho(A)$ tal que $\sigma(A) \subseteq int(\Gamma)$ e $\Gamma \subseteq \Omega$.

$$\beta = \min\{||(\lambda - A)^{-1}||^{-1} : \lambda \in \Gamma\}.$$

Daí, $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$. Seja P a projeção de Riesz correspondente à parte de $\sigma(B)$ no interior de Γ, então $||I - P|| \leq C||A - B||$, onde $C = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\Gamma ||(\lambda - A)^{-1}||^2 d\lambda$. Tome

Continuidade do espectro e autovalores.

Teorema 2

Sejam X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador linear continuo e Ω uma vizinhança aberta de $\sigma(A)$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(B) \subseteq \Omega$ para qualquer operador linear $B\colon X \to X$ com $||A - B|| < \epsilon$.

Seja $\Gamma \subseteq \rho(A)$ tal que $\sigma(A) \subseteq int(\Gamma)$ e $\Gamma \subseteq \Omega$.

$$\beta = \min\{||(\lambda - A)^{-1}||^{-1} : \lambda \in \Gamma\}.$$

Daí, $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$. Seja P a projeção de Riesz correspondente à parte de $\sigma(B)$ no interior de Γ, então $||I - P|| \leq C||A - B||$, onde $C = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\Gamma ||(\lambda - A)^{-1}||^2 d\lambda$. Tome

$$\epsilon = \min\left\{\frac{\beta}{2}, (C+1)^{-1}\right\}.$$

Teorema 3

Sejam X um espaço de Banach, $A \colon X \to X$ linear continuo, σ um conjunto finito de autovalores de A de tipo finito e $\Gamma \subseteq \rho(A)$ tal que $\sigma \subseteq int(\Gamma)$ e $\sigma(A) \setminus \sigma \subseteq ext(\Gamma)$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para qualquer operador linear $B \colon X \to X$ com $||A - B|| < \epsilon$ tem-se que:

- $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$.
- A parte de $\sigma(B)$ contida no interior de Γ é um conjunto finito de autovalores de B de tipo finito.
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in int(\Gamma)} m(\lambda, B) = \sum_{\lambda \in int(\Gamma)} m(\lambda, A)$

Definição 3

Sejam X um espaço de Banach e $A\colon X \to X$ um operador linear. A é dito um operador Voltera se A é compacto e $\sigma(A) = \{0\}$.

Definição 3

Sejam X um espaço de Banach e $A\colon X \to X$ um operador linear. A é dito um operador Voltera se A é compacto e $\sigma(A) = \{0\}$.

Corolário 2

Sejam X um espaço de Banach e $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores Volterra sobre X tal que $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ então A é um operador Volterra.

Definição 3

Sejam X um espaço de Banach e $A\colon X \to X$ um operador linear. A é dito um operador Voltera se A é compacto e $\sigma(A) = \{0\}$.

Corolário 2

Sejam X um espaço de Banach e $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores Volterra sobre X tal que $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ então A é um operador Volterra.

Suponha que $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ e escolha $C = \{\beta \in \rho(A) : |\beta - \lambda| = r\}$ com $0 < r < |\lambda|$ tal que somente $\lambda \in int(C)$. Como $A_n \to A$, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $||A_n - A|| < \epsilon$, pelo Teorema 3 e $\sigma(A_{n_0}) = \{0\}$, segue que $0 \in int(C)$, absurdo.

Corolário 3

Sejam H um espaço de Hilbert separável e $A\colon H \to H$ um operador Volterra, então existe uma sequência de operadores Volterra de posto finito $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $A = \lim_{n\to\infty} V_n$.

Referências Bibliográficas

- GOHBERG, I., GOLDBERG, S., *Basic Operator Theory,* Birkhiiuser Verlag, Boston, 1981.
- GOHBERG, ISRAEL; KREIN, *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space,* Amer. Math. Soc., 1970.
- ISRAEL GOHBERG ; SEYMOUR GOLDBERG ; MARINUS A. KAASHOEK, *Classes of linear operators Vol. I,* Birkhiiuser, Basel, 1970.