Regularidade L^p para equações parabólicas

Leonardo F. Cavenaghi, 7987592

IME - Universidade de São Paulo

leonardofcavenaghi@gmail.com

19 de junho de 2020

Visão geral

1. Por que regularidade?
2. Um mínimo de espaços de Sobolev
3. Semigrupos fortemente contínuos: uma rápida revisão
4. Regularidade L^p para equações parabólicas

Por que regularidade? Uma introdução às equações parabólicas

1. Um exemplo clássico de equação diferencial parabólica é a equação do calor:
$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t), \tag{1.1}$$
definida em um subconjunto de $\Omega \times \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ com certa regularidade. Solucionar a equação (1.1) de *modo clássico* consiste em encontrar uma função de classe pelo menos $C^2(\Omega)$ e $C^1([0,T])$, $T > 0$.

2. Um outro exemplo bastante famoso e importante em geometria consiste no *fluxo de Ricci*, em coordenadas bastantes especiais:
$$\partial_t g_{ij} = 3\Delta g_{ij} + O(\Gamma_{ij}). \tag{1.2}$$
$g = (g_{ij})$ é uma métrica riemanniana em uma variedade suave M.

Por que regularidade? Uma introdução às equações parabólicas

1. É fundamental notar aqui que a equação do fluxo de Ricci *não* é parabólica. No entanto, é possível encontrar um difeomorfismo dependente do tempo que mapeia essa equação em outra, parabólica. Isso permite provar resultados como, existência de solução em tempo curto para essa equação.
2. Seja H um espaço de Hilbert. Algumas equações parabólicas podem ser vistas como *fluxo gradiente* para um certo funcional $\mathcal{F} : H \to \mathbb{R}$.

Por que regularidade? Fluxos gradientes

Como veremos na seção seguinte, existe um espaço de Hilbert, $H_0^1(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, suficientemente regular, tal que o funcional

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$$

tem como *fluxo gradiente* a equação do calor.
Existe uma maneira precisa de definir uma *variação* de $\mathcal{F}$. A saber, tomando $v \in H_0^1(\Omega)$, podemos computar

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathcal{F}(u+sv) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_\Omega |\nabla(u+sv)|^2 = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = -\int_\Omega (\Delta u)v.$$

Por que regularidade? Fluxos gradientes

1. Existe um produto interno L^2 em $H_0^1(\Omega)$, que torna esse espaço um espaço de Hilbert.
2. Dessa maneira, Δu pode ser pensado como o gradiente de $\mathcal{F}$, pelo Teorema da representação de Riesz.
3. Assim, a equação do calor pode então ser vista como um *fluxo gradiente*, a saber, tomando uma curva $u(t) \in H_0^1$, podemos considerar a EDO:

$$\partial_t u(t,x) = -\nabla \mathcal{F}(u)(x,t) = \Delta u(x,t). \tag{1.3}$$

Um mínimo de espaços de Sobolev

Notação:

1. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
2. $x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
3. $|x|^2 := x \cdot x$,
4. Uma n–ulpa de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é chamada de *multi–índice*,
$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
é chamada de *ordem do multi–índice*.
5. $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$,
6. $D_k := \partial_k \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_k}, \; D = (D_1, \ldots, D_n)$,
$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n},$$
$$D^\alpha \equiv \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio fixado com fronteira $\partial\Omega$ e fecho $\overline{\Omega}$. Dizemos que Ω tem *fronteira* regular se $\partial\Omega$ for uma variedade suave de dimensão $n-1$. Por $C^m(\Omega)$ denotamos o conjunto de todas as funções reais ou compelxo valoradas que tem as m–primeiras derivadas (em todas as direções) contínuas.
Denotaremos por $C^m(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções como no parágrafo anterior tais que a *derivada normal* existe em pontos de $\partial\Omega$.
Para $u \in C^m(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} . \tag{2.1}$$

Se $p = 2$, dadas $u, v \in C^m(\Omega)$,

$$(u, v)_m := \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx, \tag{2.2}$$

é um produto interno bem definido.
Denote por

$$\widetilde{C}_p^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}.$$

Então,

$$W^{m,p}(\Omega) := \overline{\widetilde{C}_p^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}, \tag{2.3}$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}, \tag{2.4}$$

onde $C_0^m(\Omega)$ consiste nas funções com m–primeiras derivadas contínuas e suporte compacto em Ω.
Tanto $W^{m,p}(\Omega)$ quando $W_0^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach. Mais ainda, o último está contido no primeiro.

Um mínimo de espaços de Sobolev

Se $p = 2$, costuma-se denotar $W^{m,2}(\Omega) := H^1(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) := H_0^1(\Omega)$, e esses são espaços de Hilbert.

Observação

1. Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ consistem nas coleções de classes de funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas, no sentido de *distribuições* pertencem também a $L^p(\Omega)$.
2. Se Ω é limitado, então a desigualdade de Hölder implica que

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,r}(\Omega), \ 1 \leq r \leq p < \infty.$$

Teorema (Mergulho de Sobolev)

Seja Ω *um domínio limitado com fronteira suave em* $\mathbb{R}^n$. *Então,*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^{np/(n-kp)}(\Omega),$$

para $k < pn$ *e*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$$

para $0 \leq m < k - \dfrac{n}{p}$.

Mais ainda, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ *tais que* $\forall u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{0,np/(n-kp)} \leq C_1 \|u\|_{k,p}, \;\; kp < n, \tag{2.5}$$

e ainda, $\sup\{|D^\alpha u(x)| : |\alpha| \leq m, \;\; x \in \overline{\Omega}\} \leq C_2 \|u\|_{k,p}$.

Operadores fortemente elípticos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave. Considere o operador diferencial de ordem $2m$ definido por

$$A(x,D) := \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{2.6}$$

onde $\{a_\alpha\} \subset C^{2m}(\Omega)$.
A parte principal de $A(x,D)$ é definida por

$$A'(x,D) := \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.7}$$

O operador $A(x,D)$ é dito *fortemente elíptico* se existir $C > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}\,(-1)^m A(x,\xi) \geq C|\xi|^{2m}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.8}$$

Assuma que $\{a_\alpha\} \subset C^{2m}(\Omega)$. O operador

$$A^*(x, D)u := \sum_{|\alpha| \leq 2m} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha} u\right), \tag{2.9}$$

é chamado de *adjunto formal* de $A(x, D)$.

Observação

Segue diretamente da definição de elipticidade forte que se $A(x, D)$ é fortemente elíptico, então $A^*(x, D)$ também o é.

No caso particular de interesse dessa apresentação, consideraremos o operador

$$A_p : \mathcal{D}(A_p) := W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

$$A_p u := \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u.$$

Buscamos caracterizar soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = -A_p u(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

Para tanto, estamos interessados em descobrir quando esse operador é gerador infintesimal de um semigrupo *analítico*.

Operadores fortemente elípticos

A saber, vamos provar:

Teorema

Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Assuma que $1 < p < \infty$. Então, $-A_p$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $L^p(\Omega)$.

Semigrupos analíticos

Para nossos propósitos é interessante generalizar o conceito de semigrupo. Seja

$$\Delta := \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\} \subset \mathbb{C}.$$

A família $\{T(z)\}_{z \in \Delta}$ é dita *semigrupo analítico em* Δ se

1. $z \mapsto T(z)$ é analítica em Δ,
2. $T(0) = I,\ \lim_{z \to 0,\ z \in \Delta} T(z)x = x,\ \forall x \in X$,
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2),\ \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

Teorema

Sejam E um espaço de Banach e A um operador densamente definido em E. Assuma que

1. $$\rho(A) \supset \Sigma := \{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}, \; \exists 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \qquad (3.1)$$
2. $\|R_\lambda(A)\| \leq M/|\lambda|, \; \forall \lambda \in \Sigma, \; \lambda \neq 0$, *onde* $R_\lambda(A)$ *denote o operador resolvente de* A *em* λ.

Então, A *é um gerador infinitesimal de um* C_0*–semigrupo* $\mathcal{T}$. *Mais ainda,* $\mathcal{T}$ *é uniformemente limitado* $(\omega = 0)$, *e* $\mathcal{T}$ *pode ser estendido a um semigrupo analítico com setor*

$$\Delta_\delta := \{z : |\arg z| < \delta\}.$$

Teorema (Caracterização de semigrupos analíticos)

Seja $\mathcal{T}$ um C_0–semigrupo uniformemente limitado. Seja A o gerador infinitesimal de $\mathcal{T}$. Assuma que $0 \in \rho(A)$. Então, são equivalentes:

1. *$\mathcal{T}$ pode ser estendido a um semigrupo analítico no setor $\Delta_\delta := \{z : |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(z)\|$ é uniformemente limitado em qualquer setor fechado $\Delta_{\delta'} \subset \Delta_\delta$, $\delta' < \delta$.*
2. *Existem $0 < \delta < \pi/2$ e $M > 0$ tais que*
   a) $$\rho(A) \supset \Sigma := \{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}, \ \exists 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \tag{3.2}$$
   b) $\|R_\lambda(A)\| \leq M/|\lambda|, \ \forall \lambda \in \Sigma, \ \lambda \neq 0.$

Teorema (Estimativa de Schauder)

Seja A um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Assuma que $1 < p < \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2m,p} \leq C \left(\|Au\|_{0,p} + \|u\|_{0,p} \right), \tag{4.1}$$

para todo $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$.

Corolário

Se $A(x, D)$ está nas condições do Teorema anterior, então A_p é fechado.

Teorema (Agmon–Schauder)

Seja A um operador fortemente elítpico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Assuma que $1 < p < \infty$. Então, existem constantes $C > 0$, $R \geq 0$ e $0 < \vartheta < \pi/2$ tais que

$$\|u\|_{0,p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|(\lambda I + A)u\|_{0,p} \,, \tag{4.2}$$

para todos $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\lambda| \geq R$ e $\vartheta - \pi < \arg \lambda < \pi - \vartheta$.

Regularidade L^p

Teorema

Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Assuma que $1 < p < \infty$. Então, $-A_p$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $L^p(\Omega)$.

Prova: Para ver que o domínio de A_p é denso em $L^p(\Omega)$ apenas note que as funções suaves com suporte compacto são densas em $L^p(\Omega)$ e são elementos do domínio de A_p. Analogamente, A_q^* é densamente definido. Pelo Teorema de Agmon–Schauder, segue que existem constantes $C > 0$, $R \geq 0$ e $0 < \vartheta < \pi/2$ tais que

$$\|u\|_{0,p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \left\|(\lambda I + A_p)u\right\|_{0,p}, \tag{4.3}$$

para todos $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\lambda| \geq R$ e $\vartheta - \pi < \arg \lambda < \pi - \vartheta$. Isso, em particular, implica que $\lambda I + A$ é injetivo.

Um raciocínio completamente análogo implica que existem constantes $C' > 0$, $R' \geq 0$ e $0 < \vartheta' < \pi/2$ tais que

$$\|v\|_{0,q} \leq \frac{C'}{|\lambda'|} \left\|(\lambda' I + A_q^*)v\right\|_{0,q}, \tag{4.4}$$

para todos $v \in W^{2m,q}(\Omega) \cap W_0^{m,q}$, $\lambda' \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\lambda'| \geq R'$ e $\vartheta' - \pi < \arg \lambda' < \pi - \vartheta'$.

Tome $\vartheta^* := \min\{\vartheta, \vartheta'\}$, $R^* := \max\{R, R'\}$ e considere o conjunto Σ_{ϑ^*} para o qual vale que para todo $\lambda \in \Sigma_{\vartheta^*}$, $\lambda I + A_p$ e $\lambda I + A_q^*$ são injetores.

Verifiquemos que de fato, $\lambda I + A_p$ é bijetivo.

Tome $v \in \mathcal{D}(A_q^*)$ tal que

$$\langle (\lambda I + A)u, v\rangle = 0, \ \forall u \in \mathcal{D}(A_p).$$

Pela definição de adjunto formal, temos que

$$\langle u, (\overline{\lambda} I + A_q^*)v\rangle = 0, \ \forall u \in \mathcal{D}(A_p).$$

Como $D(A_p)$ é denso em L^p, então segue que

$$(\lambda I - A_q^*)v = 0.$$

Utilizando a equação (4.3) concluímos que para todo $\lambda \in \Sigma_{\vartheta^*}$,

$$\|(\lambda I + A_p)^{-1} u\|_{0,p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|u\|_{0,p}. \tag{4.5}$$

Pelo Teorema de Caracterização de Semigrupos analíticos, concluímos o afirmado. \ ■

Portanto, o fato de $-A_p$ ser gerador de um semigrupo analítico implica, em particular, que $-A_p$ gera um C_0–semigrupo uniformemente limitado. Junto da estimativa de Schauder, concluímos que não só existe solução para o problema (2.10), como também, temos regularidade em $W^{2m,p}(\Omega)$.

Regularidade L^p para operadores de segunda ordem

1. O argumento anterior dependeu fortemente de estimativas a priori: Schauder e Agmon–Schauder. No caso particular de operadores de segunda ordem na forma *divergente*, podemos dar uma demonstração mais direta.
2. Seja Ω um domínio limiado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Considere o operador
$$A(x, D)u = -\sum_{k,l=1}^{n} \partial_k \left(a_{k,l}(x)\partial_l u\right).$$
3. Assumimos que $a_{k,l}(x) = a_{l,k}(x) = \overline{a_{l,k}}(x)$, $\forall l, k$, $\forall x$ e que esses são funções de classe $C^n(\Omega)$.
4. Pedimos também que $A(x, D)$ seja fortemente elíptico, isto é, existe $C_0 > 0$ tal que
$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}(x)\xi_k\xi_l \geq C_0 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = C_0|\xi|^2.$$

Regularidade L^p para operadores de segunda ordem

Como antes, consideramos o operador $A_p := A(x, D)$, $1 < p < \infty$.

Teorema

Seja $1 < p < \infty$. Então, o operador $-A_p$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações em $L^p(\Omega)$.

Prova: Denote por $\langle , \rangle$ o pareamento (dado pela integral) entre $L^p(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $u \in \mathcal{D}(A)$, coloque $u^* := |u|^{p-2}\overline{u} \in L^q(\Omega)$. Vale ainda que $\langle u, u^* \rangle = \|u\|_{0,p}^p$.

Assuma por ora que $2 \leq p < \infty$. Uma integração por partes implica que

$$\langle Au, u^* \rangle = -\int_\Omega \sum_{k,l=1}^n \partial_k \left(a_{k,l} \partial_l u \right) \overline{u} |u|^{p-2} dx \tag{4.6}$$

$$= \int_\Omega \sum_{k,l=1}^n a_{k,l} \partial_l u \partial_k \left(\overline{u} |u|^{p-2} \right) dx \tag{4.7}$$

$$\langle A_p u, u^* \rangle = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \left(|u|^{p-2} \partial_l u \partial_k \overline{u} + \overline{u} \partial_l u \partial_k (|u|^{p-2}) \right) dx, \tag{4.8}$$

$$\partial_k |u|^{p-2} = \frac{1}{2} (p-2) |u|^{p-4} (\overline{u} \partial_k u + u \partial_k \overline{u}) . \tag{4.9}$$

Denote por

$$|u|^{(p-4)/2} \overline{u} (\partial_k u) := \alpha_k + i \beta_k . \tag{4.10}$$

Então, equações (4.8), (4.9) e (4.10) implicam em

$$\langle A_p u, u^* \rangle = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \left((p-1) \alpha_k \alpha_l + \beta_k \beta_l + i(p-2) \alpha_k \beta_l \right) dx \tag{4.11}$$

Seja M tal que

$$\max_{k,l\in\{1,\dots,n\}} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\alpha_{k,l}(x)| \leq M,$$

e defina,

$$|\alpha|^2 := \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 dx, \tag{4.12}$$

$$|\beta|^2 = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 dx. \tag{4.13}$$

Usando a elipticidade forte:

$$\mathrm{Re}\langle A_p u, u^* \rangle \geq C_0 \left((p-1)|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \geq 0. \tag{4.14}$$

Seja $\rho > 0$ qualquer. Utilizando o caso elementar da desigualdade de Young para produtos (Peter–Paul inequality):

$$|\mathrm{Im}\langle A_p u, u^*\rangle| \leq |p-2| M \left(\frac{\rho}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2\rho}|\beta|^2 \right). \tag{4.15}$$

Logo,

$$\frac{|\mathrm{Im}\langle A_p u, u^*\rangle|}{|\mathrm{Re}\langle A_p u, u*\rangle|} \leq \frac{|p-2| M \left(\frac{\rho}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2\rho}|\beta|^2 \right)}{C_0 \left((p-1)|\alpha|^2 + |\beta|^2 \right)}. \tag{4.16}$$

Por fim, $\rho := \sqrt{p-1}$ implica

$$\frac{|\mathrm{Im}\langle A_p u, u^*\rangle|}{|\mathrm{Re}\langle A_p u, u*\rangle|} \leq \frac{M|p-2|}{2C_0\sqrt{p-1}}. \tag{4.17}$$

Utilizando a equação (4.14) verificamos que o operador $-A_p$ é *dissipativo*. Isso implica que para todo $\lambda > 0$ e $u \in \mathcal{D}(A_p)$,

$$\lambda \|u\|_{0,p} \leq \|(\lambda I + A_p)u\|_{0,p}. \tag{4.18}$$

Daí, $\lambda I + A_p u$ é inejtivo e tem imagem fechada para todo $\lambda > 0$.
Mostremos que esse operador é também sobrejetivo se $p \geq 2$.
Tome $v \in L^q(\Omega)$. Assuma que

$$\langle (\lambda I + A_p)u, v \rangle = 0.$$

Então,

$$\langle u, (\lambda I + A_q)v \rangle = 0.$$

Como $\mathcal{D}(A_p)$ é denso em L^p, então,

$$(\lambda I + A_q)v = 0.$$

Mas é claro que nesse caso $v = 0$ porque poderíamos ter feito uma conta completamente análoga para A_q. Como consequência,

$$\|(\lambda I + A_p)^{-1}\|_{0,p} \leq \frac{1}{\lambda}, \ \forall \lambda > 0. \tag{4.19}$$

Segue então do Teorema de Hille–Yoshida que $-A_p$ é gerador infinitesimal de um C_0–semigrupo de contrações.
Verifiquemos que o semigrupo gerado é de fato analítico.
Se $S(-A_p)$ denota a imagem numérica de $-A_p$, então, como vale que

$$\frac{|\mathrm{Im}\langle A_p u, u^*\rangle|}{|\mathrm{Re}\langle A_p u, u^*\rangle|} \leq \frac{M|p-2|}{2C_0\sqrt{p-1}}. \tag{4.20}$$

e $-A_p$ é dissipativo, temos que $S(-A_p)$ está contida em

$$S_{\vartheta_1} = \{\lambda : |\arg \lambda| > \pi - \vartheta_1\},$$

onde,

$$\vartheta_1 = \mathrm{arctg}\left(M|p-2|/2C_0\sqrt{p-1}\right),\ 0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Para finalizar, se escolhe $\vartheta_1 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$ e considera-se

$$\Sigma_\vartheta := \{\lambda : |\arg\, \lambda| < \pi - \vartheta\}.$$

Assim,

1. Existe C_ϑ tal que para todo $\lambda \in \Sigma_\vartheta$,
$$d(\lambda, \overline{S(-A_p)}) \geq C_\vartheta |\lambda|.$$
2. Pelos passos anteriores, $0 < \lambda \in \rho(-A_p)$.
3. $\rho(-A_p) \supset \Sigma_\vartheta$, daí,
$$\|(\lambda I + A_p)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_\vartheta |\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\vartheta.$$
4. Como consequência, pelo Teorema de Caracterização de semigrupos analíticos, o resultado segue.

\ ■

Lembre-se da definição de supremo essencial:

$$\mathrm{ess\ sup}\{|u(x)| : x \in \Omega\} := \{\inf c > 0 : \mu(\{x : |u(x)| > c\}) = 0\}.$$

Colocamos,

$$\|u\|_{0,\infty} := \mathrm{ess\ sup}\{|u(x)| : x \in \Omega\}.$$

Seja $A(x, D)$ o operador diferencial fortemente elíptico de ordem $2m$ dos slides anteriores. Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um domínio limitado com fronteira suave. Associamos a $A(x, D)$ o operador A_∞ definido em $L^\infty(\Omega)$ com domínio:

$$\mathcal{D}(A_\infty) := \{u : u \in W^{2m,p}(\Omega) \forall p > n, \ A(x, D)u \in L^\infty(\Omega), \ D^\beta u = 0 \ em \ \partial\Omega,$$

$$\forall 0 \leq |\beta| < m\},$$

$$A_\infty u := A(x, D)u, \ \forall u \in \mathcal{D}(A_\infty).$$

Observe que pelo Teorem do Mergulho de Sobolev, $D(A_\infty) \subset C^{2m-1}(\overline{\Omega})$. Uma vez que $\partial\Omega$ é suave, a condição $D^\beta u = 0$ faz sentido em $\partial\Omega$. Mais ainda,

$$\mathcal{D}(A_\infty) \subset W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) = \mathcal{D}(A_p),\ \forall p > n.$$

Note, no entanto, que $-A_\infty$ não pode ser gerador infinitesimal de um semigrupo em $L^\infty(\Omega)$, porque $\mathcal{D}(A_\infty)$ é *nunca denso* em $L^\infty(\Omega)$. Isso segue do fato que $\mathcal{D}(A_\infty) \subset C(\overline{\Omega})$, de onde,

$$\overline{\mathcal{D}(A_\infty)} \subset C(\overline{\Omega}),$$

e esse último é nunca denso em $L^\infty(\Omega)$.

Para contornar esse problema, considera-se:

$$\mathcal{D}(A_c) := \{u : u \in \mathcal{D}(A_\infty), \; A(x, D) \in C(\Omega), \; A(x, D)u = 0 \; em \; \partial\Omega\}, \tag{4.21}$$

$$A_c u := A(x, D)u, \; \forall u \in \mathcal{D}(A_c), \tag{4.22}$$

pensando em A_c agindo no espaço de Banach:

$$C := \{u : u \in C(\overline{\Omega}), \; u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Temos portanto,

Teorema

O operador $-A_c$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em C.

Breves comentários sobre regularidade para $p = 1, \ p = \infty$

O caso $p = 1$ usa o Teorema anterior mais um argumento de dualidade, junto do essencial Lema:

Lema

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$. Para $u \in L^1(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{0,1} = \sup\{\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \|\varphi\|_{0,\infty} \leq 1\}. \tag{4.23}$$

O operador $A(x, D)$ é então definido em

$$\mathcal{D}(A_1) := \{u : u \in W^{2m-1,1}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega), \ A(x, D)u \in L^1(\Omega)\},$$

$$A_1 u := A(x, D)u, \ \forall u \in \mathcal{D}(A_1).$$

Teorema

O operador $-A_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $L^1(\Omega)$.