Autovalores de tipo finito e cadeias de Jordan

Ivan Romualdo de Oliveira
Universidade de São Paulo

Sumário

Introdução

Introdução

- Autovalores de tipo finito visam estender propriedades de autovalores de matrizes finitas. Quais propriedades?
- Cadeias de Jordan em autovalores de tipo finito são úteis para definir uma base de autovetores e autovetores generalizados. Além disso, existe um teorema interessante que os relaciona com soluções de equações diferenciais do tipo

$$y'(t) = Ay(t), \quad -\infty < t < \infty$$

onde A é um operador limitado num espaço de Banach.

Autovalores de tipo finito

Autovalores de tipo finito

Nesta apresentação A será um operador limitado no espaço de Banach X, $\sigma(A)$ o espectro de A e $\sigma \subset \sigma(A)$ parte isolada do espectro.

Definição 1: Seja $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Dizemos que λ_0 é *autovalor de tipo finito* se X admite decomposição:

$$X = M \oplus L$$

e valem as propriedades:

1. M e L são subespaçoes A-invariantes.
2. $\dim M < \infty$.
3. $\sigma(A|M) = \{\lambda_0\}$ e $\lambda_0 \notin \sigma(A|L)$.

Observação: As condições 2 e 3 implicam que λ_0 é autovalor de $A|M$.

Autovalores de tipo finito

<u>Teorema 1</u>: Um ponto $\lambda_0 \in \sigma(A)$ é autovalor de tipo finito *se, e somente se*, λ_0 é ponto isolado em $\sigma(A)$ e a projeção de Riesz correspondente, $P_{\{\lambda_0\}}$, tiver rank finito.

<u>Prova</u>: Por ponto isolado queremos dizer que $\{\lambda_0\}$ é parte isolada de $\sigma(A)$.

- *Volta*: Assuma que λ_0 é ponto isolado e que $\mathrm{rank} P_{\{\lambda_0\}} < \infty$. Defina:

$$M = ImP_{\{\lambda_0\}} \quad \text{e} \quad L = KerP_{\{\lambda_0\}}. \tag{1}$$

Autovalores de tipo finito

Vamos recordar um teorema visto em aula:

Teorema(I.2.2-Gohberg)

Seja σ parte isolada de $\sigma(A)$ e $M = ImP_\sigma = P_\sigma(X)$ e $L = KerP_\sigma$. Então:

$$X = M \oplus L, \tag{2}$$

onde M e L são subespaços A-invariantes e

$$\sigma(A|M) = \sigma \quad \text{e} \quad \sigma(A|L) = \sigma(A) \setminus \sigma = \tau. \tag{3}$$

Deste teorema segue que as condições 1 e 3 na definição de autovalor de tipo finito são satisfeitas. Além disso, 2 é satisfeita por hipótese e portanto λ_0 é de tipo finito.

- *Ida*: Assuma que λ_0 é autovalor de tipo finito. Então:

$$X = M \oplus L \tag{4}$$

com as propriedades 1-3. Vamos recordar uma Proposição vista em aula:

Proposição (I.2.4-Gohberg)

Suponha que $X = M \oplus L$ onde L e M são subespaços fechados e invariantes sob $A \in B(X)$. Então:

$$\sigma(A) = \sigma(A|M) \cup \sigma(A|L) \tag{5}$$

e se $\sigma(A|M) \cap \sigma(A|L) = \emptyset$ vale

$$M = ImP_{\sigma(A|M)} \quad \text{e} \quad L = KerP_{\sigma(A|M)} \tag{6}$$

Como $A|M$ e $A|L$ são operadores limitados, segue que $\sigma(A|M) = \{\lambda_0\}$ é fechado e portanto parte isolada. Segue também da proposição que

$$M = ImP_{\{\lambda_0\}}. \tag{7}$$

Mas como dim(M)$< \infty$, então $rankP_{\{\lambda_0\}} < \infty$, o que conclui o teorema.

$\square$

Autovalores de tipo finito- Exemplos

Exemplo 1: Seja $S : l^2 \to l^2$ definido por

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) = (\alpha_2, \alpha_3, ...).$$

Se $|\lambda| < 1$, então é autovalor de:

$$S(1, \lambda, \lambda^2, ...) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, ...).$$

Pelo Teorema 1, vemos que este autovalor não é de tipo finito pois não é ponto isolado.

Autovalores de tipo finitos- Exemplos

Exemplo 2: *Qualquer autovalor de uma matriz A agindo num espaço vetorial de dimensão finita é de tipo finito*: Seja $\lambda \in \sigma(A)$ qualquer. Então λ é parte isolada do espectro e pelo Teorema $I.2.2$ (Gohberg) é também de tipo finito.

Exemplo 3: *Qualquer autovalor não-nulo de um operador compacto é de tipo finito*: Seja σ uma parte isolada do espectro de um operador compacto A que não contém zero. Considere a bola unitária fechada em X. A imagem de P_σ agindo nesta bola é uma bola, pois este é limitado. Se P_σ for compacto, isto significa que a imagem da bola unitária é compacta e portanto $rank P_\sigma < \infty$.

Autovalores de tipo finitos- Exemplos

De fato, P_σ é compacto:

$$\begin{aligned} P_\sigma &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda && (8) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A + A)(\lambda - A)^{-1} && (9) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} I d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda && (10) \\ &= A\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda\right). && (11) \end{aligned}$$

Como a composição de um operador compacto com um limitado é compacto, segue que P_σ é compacto e portanto $rank P_\sigma < \infty$. Além disso, qualquer $\lambda \in \sigma$ é ponto isolado. Segue pelo Teorema 1 que qualquer autovalor diferente de zero de um operador compacto é de tipo finito.

Autovalores de tipo finito

Definição 2: Seja λ_0 autovalor de tipo finito de A e $X = M \oplus L$ onde

$$M = ImP_{\{\lambda_0\}} \quad \text{e} \quad L = kerP_{\{\lambda_0\}}.$$

Chamamos de *multiplicidade algébrica de* λ_0 a dimensão de M, isto é:

$$m(\lambda_0; A) = rankP_{\{\lambda_0\}}.$$

Chamamos de *multiplicidade geométrica de* λ_0 *a dimensão*

$$dimKer(\lambda_0 - A).$$

Autovalores de tipo finito

<u>**Corolário 1**</u>: Seja σ parte isolada de $\sigma(A)$. Então a projeção de Riesz correspondente, P_σ, tem rank finito *se, e somente se*, σ é formado por um número finito de autovalores de tipo finito de A. Além disso, neste caso

$$rankP_\sigma = \sum_{\lambda \in \sigma} m(\lambda; A).$$

<u>Prova</u>: Pelo Teorema que revisamos, temos que $M = ImP_\sigma$ e $\sigma(A|M) = \sigma$.

- *Ida*: Assuma que $rankP_\sigma < \infty$. Segue que M é um espaço de dimensão finita e portanto $\sigma(A|M)$ consiste de um número finito de autovalores que denotaremos por:

$$\lambda_1, ..., \lambda_r. \tag{12}$$

Autovalores de tipo finito

Segue que M admite a decomposição

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_r \tag{13}$$

tal que $AM_j \subset M_j$ e $\sigma(A|M_j) = \{\lambda_j\}$ para $j = 1, ..., r$. Vamos definir:

$$L_j = M_1 \oplus ... \oplus M_{j-1} \oplus ... \oplus M_{j+1} \oplus M_r \oplus KerP_\sigma. \tag{14}$$

Portanto:

$$X = M_j \oplus L_j \tag{15}$$

e as condições de autovalor de tipo finito são satisfeitas e $\sigma(A|M)$ é composto por um número finito destes.

- *Volta*:

Assuma que $\sigma = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ onde os λ's são autovalores diferentes de A de tipo finito. Então

$$ImP_\sigma = ImP_{\{\lambda_1\}} \oplus ... \oplus ImP_{\{\lambda_r\}} \tag{16}$$

e portanto

$$rankP_\sigma = \sum_{j=1}^{r} rankP_{\{\lambda_j\}} = \sum_{j=1}^{r} m(\lambda_j; A) \tag{17}$$

$\square$

Cadeias de Jordan

Cadeias de Jordan

Definição 3: Seja X Banach, $A : X \to X$ limitado e λ_0 autovalor de A. Um conjunto ordenado $\{x_0, x_1, ..., x_{r-1}\}$ é chamado de *cadeia de Jordan de A em* λ_0 se

1. $x_0 \neq 0$.
2. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ e $Ax_j = \lambda_0 x_j + x_{j-1}$ com $j = 1, ..., r-1$.

O primeiro vetor da cadeia, x_0, é um autovetor de λ_0 e os demais são chamados de *autovetores generalizados de A*.

Cadeias de Jordan

Podemos caracterizar uma cadeia de Jordan da seguinte maneira.

Afirmação: Sejam $x_0, ..., x_{r-1}$ vetores em X. Então $\{x_0, ..., x_{r-1}\}$ é uma cadeia de Jordan de A em λ_0 *se, e somente se,*:

1. $x_0, ..., x_{r-1}$ são linearmente independentes.
2. $M_0 = span\{x_0, ..., x_{r-1}\}$ é invariante sob A.
3. A matriz $A|M_0$ relativa a base $x_0, ..., x_{r-1}$ é um único bloco de Jordan com λ_0 na diagonal.

Proposição 1: Se λ_0 é autovalor de tipo finito, então $ImP_{\{\lambda_0\}}$ tem base de autovetores e autovetores generalizados.

Prova: O espaço $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$ é de dimensão finita e A-invariante. Então existe uma base em M relativa a qual a matriz $A|M$ tem forma normal de Jordan. Esta base é constituida de autovetores (generalizados).

$\square$

<u>**Proposição 2**</u>: Os vetores $x_0, ..., x_{r-1}$ formam uma cadeia de Jordan em λ_0 *se, e somente se,* $x_0 \neq 0$ e

$$y(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^{\nu} x_{r-1-\nu}\right)$$

satisfaz a equação diferencial

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{com } -\infty < t < \infty.$$

<u>Prova</u>:

- Assuma que $\{x_0, ..., x_{r-1}\}$ é uma cadeia de Jordan de A em λ_0.

Cadeias de Jordan

Seja Γ um contorno de Cauchy que contenha $\sigma(A)$ no seu interior. Então:

$$
\begin{aligned}
e^{tA}x_{r-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}x_{r-1}d\lambda && (18)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{t\lambda_0}}{n!}t^n(\lambda-\lambda_0)^n(\lambda - A)^{-1}x_{r-1}d\lambda && (19)\\
&= e^{t\lambda_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-\lambda_0)^n(\lambda - A)^{-1}x_{r-1}d\lambda\right) && (20)\\
&= e^{t\lambda_0}\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{n!}t^n x_{r-1-n} && (21)\\
&= y(t). && (22)
\end{aligned}
$$

Vamos recordar um Lema visto em aula:

Lema (I.5.1-Gohberg)

A função $t \to e^{tA}$ de $\mathbf{R}$ em $B(X)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

Segue deste Lema que:

$$\frac{d}{dt}(y(t)) = \frac{d}{dt}(e^{tA}x_{r-1}) = Ae^{tA}x_{r-1} = Ay(t), \qquad (23)$$

e portanto $y(t)$ é solução.

Cadeias de Jordan

Assuma que $y(t)$ como dado é solução da equação diferencial. Então:

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_0)y(t) &= y'(t)-\lambda_0 y(t) && (24)\\
&= \lambda_0 e^{\lambda_0 t}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}t^{\nu}\lambda_0 x_{r-1-\nu}+ && (25)\\
&\quad + e^{\lambda_0 t}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\nu t^{\nu-1}x_{r-1-\nu}+ && (26)\\
&\quad - \lambda_0 e^{\lambda_0 t}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}t^{\nu}\lambda_0 x_{r-1-\nu} && (27)\\
&= e^{\lambda_0 t}\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{(\nu-1)!}t^{\nu-1}x_{r-1-\nu}. && (28)
\end{aligned}
$$

Dai podemos concluir que:

$$(A - \lambda_0)x_0 = 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda_0)x_j = x_{j-1}, \quad j = 1, ..., r-1, \tag{29}$$

ou seja, $x_0, ..., x_{r-1}$ é uma cadeia de Jordan.

$\square$

Soluções na forma de $y(t)$ são chamadas de *soluções elementares*. Note que que as soluções elementares são precisamente aquelas onde o valor inicial em $t = 0$ é um autovetor (generalizado). Se o valor inicial for uma combinação linear de autovetores (generalizados) então a solução é uma combinação linear de soluções elementares. Se o span dos autovetores (generalizados) é denso em X, então qualquer solução desta equação diferencial pode ser aproximada em intervalos finitos por soluções elementares.

Cadeias de Jordan

Assuma que $\{x_0, ..., x_{r-1}\}$ é cadeia de Jordan de A em λ_0, autovalor de tipo finito. Então, para $\lambda \in \rho(A)$ vale que:

$$(\lambda - A)^{-1} x_j = \sum_{\nu=0}^{j} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{\nu+1}} x_{j-\nu}. \tag{30}$$

Seja Γ um contorno de Cauchy em torno de λ_0 que separa λ_0 de $\sigma(A) \backslash \{\lambda_0\}$. Integrando (30) em Γ resulta em:

$$P_{\{\lambda_0\}} x_j = x_j, \tag{31}$$

para $j = 0, ..., r-1$. Segue da Proposição acima que $ImP_{\{\lambda_0\}}$ é o espaço que resulta do span dos autovetores e autovetores generalizados de λ_0. Chamamos este espaço de *autoespaço generalizado*.

Conclusão

Conclusão

- Autovalores de tipo finito possuem propriedades de autovalores de matrizes finitas:
  1. Decomposição de X em soma direta;
  2. Projetor de Riesz de uma parte isolada do espectro com autovalores de tipo finito tem rank finito;
  3. Se λ_0 é autovalor de tipo finito, $ImP_{\{\lambda_0\}}$ tem base de autovetores e autovetores generalizados.
- Se $\{x_0, ..., x_{r-1}\}$ é cadeia de Jordan de A em λ_0, então:
  1. $A|M$ na base de autovetores generalizados é um um único bloco de Jordan com λ_0 na diagonal;
  2. A equação diferencial $y'(t) = Ay(t)$ tem solução

$$y(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^{\nu} x_{r-1-\nu}\right), \quad -\infty < t < \infty.$$

Referência

3. Sob certas condições, podemos ter que o span dos autovetores generalizados formam um espaço denso em X. Chamamos esta propriedade de *completude dos autovetores (generalizados)*. Para o caso de A ser compacto, ver Parte II do Gohberg.

- Referência: Gohberg- Classes of linear operators, Vol 1.

Obrigado!