O Teorema do Mapeamento Espectral

Gabriel Bonuccelli Heringer Lisboa
7994044

Profª. Drª. Nataliia Goloshchapova

Universidade de São Paulo

São Paulo, 2020

Enunciado

- X é um espaço de Banach complexo, salvo indicação em contrário; $T \in \mathbf{B}(X)$
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - T : \mathcal{D}(T) \to X$ é bijeção em $X\}$ é o *conjunto resolvente* do operador T
- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - T : \mathcal{D}(T) \to X$ não é bijeção em $X\}$ $= \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é o *espectro* do operador T

"Teorema do Mapeamento Espectral"

Se $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ é uma função contínua, então $\sigma(f(T))$ é o fecho do conjunto $f(\sigma(T))$, isto é,

$$\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma(T))}.$$

Indicação em contrário: TME em dimensão finita

Sejam $X = V$ um espaço vetorial com $dim\ V = n < +\infty$ sobre $\mathbb{C}$, e $A \in M_n(\mathbb{C})$ a forma matricial de um operador linear em V e $f \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio qualquer. Sem perda de generalidade, assuma que A está em sua forma canônica de Jordan (para aplicarmos $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$, onde P é a matriz mudança de base inversível do TFCJ). Assim

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \text{ com } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Após aplicarmos uma série de potências nesta decomposição, considerando a expansão de Taylor para f se for o caso, obteremos

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(J_m) \end{pmatrix},$$ onde cada $f(J_k)$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais $f(\lambda_k)$. Isto implica que os autovalores de $f(A)$ são precisamente as entradas diagonais de $f(J_k)$[1], a saber, $f(\lambda_i)$, onde λ_i são os autovalores de A. Segue $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Esta prova generaliza o TME para qualquer espaço vetorial V de dimensão finita sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$: basta incluirmos $\mathbb{K}$ no seu fecho algébrico $\overline{\mathbb{K}}$ e levantar V sobre $\overline{\mathbb{K}}$, onde é possível obter a forma canônica de Jordan.

[1] prova-se por indução no grau do polinômio f

Caso geral - X um espaço de Banach

Definição 1 (aula 13)

Uma função $T(.) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbf{B}(X)$ é dito um $C_0 -$ *semigrupo* se satisfaz as seguintes condições:

- $T(0) = I$ e $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (condição de semigrupo)
- Para cada $x \in X$, a órbita $T(.)x : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X; t \mapsto T(t)x$ é contínua (condição de fortemente contínua)

Outra notação usada para $T(.)$ é uma família de funções $\{T(t)\}_{0 \leq t \leq \infty}$.
Note que substituindo $\mathbb{R}_{\geq 0}$ por $\mathbb{R}$, obtemos um $C_0 -$ *grupo* com gerador A.

- $T(t)$ é *uniformemente contínuo* se $\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$

Definição 2

O *gerador (infinitesimal)* A do C_0-semigrupo $T(.)$ é dado por:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \,|\, \exists \lim_{x \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\},$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Inicialmente, A é um operador fechado e densamente definido num espaço de Banach - mas é do escopo deste trabalho discutir as consequências de mudar tais hipóteses.

Consideremos um sistema linear de equações de evolução dado por

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} , \ t \geq 0$$

no *espaço de estados* $\mathbf{B}(X)$ de um dado operador linear limitado A, fechado e densamente definido, com condição inicial $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Queremos encontrar um *estado* $u(t) \in X$ que descreve o sistema governado por A no tempo $t \geq 0$.

Ideia

Caracterizar a solução deste sistema por um semigrupo de operadores em um espaço de funções definidas num espaço de Banach. Por sua vez, iremos descrever tal semigrupo através do espectro de seu gerador.

Mais precisamente, *achar a solução única* $u \in \mathbf{B}(X)$ *deste sistema, que dependa continuamente de* u_0, *é equivalente ao fato de que* A *gera o* C_0*-semigrupo* $T(.)$, *e fornece a solução* $u(t) = T(t)u_0$.

Ainda no contexto do problema de Cauchy, diremos que $T(.)$ ou A satisfazem o *teorema do mapeamento espectral* se valer

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$$

para todo $t \geq 0$, onde definimos $e^{t\emptyset} = \emptyset$. Note que $0 \notin e^{t\sigma(A)}$.

Pergunta

Quais os espaços de funções "admissíveis" para o teorema? Quais classes de funções?

Contraexemplo

Onde não vale

Considere o espaço de Banach
$X := C_1^0([0,1]) = \{f \in C^0([0,1]) \mid f(1) = 0\}$ das funções contínuas em $[0,1]$ que se anulam em $t = 1$ munido da norma do supremo $\|.\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f \mapsto \|f\| := \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

As *translações à esquerda* T_E dadas por

$$(T_E(s)f)(t) := \begin{cases} f(s+t) \text{ para } s+t \leq 1, \\ 0 \text{ para } s+t > 1 \end{cases}$$

definem um C_0-semigrupo $T_E(.)$ em X cujo gerador A é dado por:

$$Af = f',$$

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in X \cap C^1([0,1]) \,|\, f \in C^1(\mathbb{R}_+), f' \in X\}.$$

Verifica-se que, dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $g \in X$, a equação $\lambda f - f' = g$ admite solução única $f \in X$ dada por

$$f(s) = \int_s^1 e^{\lambda(s-t)} g(t)\ dt.$$

Ou seja, $\sigma(A) = \emptyset$. Por outro lado, $\forall s \geq 0$, o operador linear $T(s)$ é limitado, logo $\sigma(T(s)) \neq \emptyset$, $\forall s \geq 0$.

Definição 3

Um C_0-semigrupo $T(.)$ é dito *(uniformemente) exponencialmente estável* se existirem constantes $M, \epsilon > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\epsilon t}, \forall t \geq 0$$

ou equivalentemente $\|T(t)x\| \leq Me^{-\epsilon t}\|x\|, \forall x \in X, \forall t \geq 0$.
Em particular, o caso $M = 1$ condiz com o *teorema de Lummer-Phillips*:
$\|T(t)\| \leq e^{-\epsilon t}$ para todo $t \geq 0 \iff A - \epsilon I$ é *dissipativo*.

Validade do Teorema

Relembrando (aula 4)

Nós definimos os conjuntos

- $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - A$ é não injetor$\}$ o *espectro pontual* de A;
- $\sigma_{ap}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A) : \|x_n\| = 1,$ $\|\lambda x_n - Ax_n\| \to 0 \,(n \to \infty)\}$ o *espectro pontual aproximado* de A; e
- $\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \overline{R_\lambda(A)} \neq X\}$, i.e., $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $R_\lambda(A)$ não é denso em X, o *espectro residual* de A.

Sua propriedades incluem:

$$\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \overline{R_\lambda(A)} \neq R_\lambda(A)\},$$

$$\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A),$$

$$\partial\sigma(A) \subseteq \partial\sigma_{ap}(A), \text{ com igualdade se } A \text{ for limitado.}$$

Algumas versões do TME só valem para "partes" do espectro:

Teorema da Inclusão Espectral

Seja A um gerador para o C_0-semigrupo $T(.)$. Então valem

$$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)) \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} e^{t\sigma_p(A)} &\subseteq \sigma_p(T(t)), \\ e^{t\sigma_{ap}(A)} &\subseteq \sigma_{ap}(T(t)), \\ e^{t\sigma_r(A)} &\subseteq \sigma_r(T(t)). \end{aligned}$$

Prova:

Antes, provaremos um lema:

Lema: *Seja A o gerador do C_0-semigrupo $(T(t))_{t\in\geq 0}$. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $t > 0$, vale a seguinte identidade*:

$$e^{-\lambda t}T(t)x - x = \begin{cases} (A-\lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds, \text{ se } x \in X, \\ \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda)xds \text{ se } x \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Prova do lema: Primeiro, observe que $A - \lambda$ é gerador do C_0-semigrupo $(e^{-\lambda t}T(t))_{t \in \geq 0}$, de mesmo domínio de A. Daí, temos que:

$$\frac{1}{h}\left(e^{-\lambda h}T(h)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\ ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^t e^{-\lambda(s+h)}T(s+h)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\ ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\ ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-\lambda s}T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\ ds$$

que converge para $e^{-\lambda t}T(t)x - x$, conforme $h \to 0^+$.

Em particular, se $x \in \mathcal{D}(A)$, sabemos que as funções $s \mapsto e^{-\lambda s}T(s)\left(\frac{e^{-\lambda h}T(h)x-x}{h}\right)$ convergem uniformemente em $[0,t]$ para $s \mapsto e^{-\lambda s}T(s)Ax$ quando $h \to 0^+$. Portanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(e^{-\lambda h}T(h) - I)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\; ds$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\frac{1}{h}(e^{-\lambda h}T(h) - I)x\; ds = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)Ax\; ds \square$$

A identidade do lema anterior implica que, se $(\lambda - A)$ não é uma bijeção, então $(e^{\lambda t} - T(t)$ também não é, provando a inclusão

$$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)).$$

Mais ainda: se existe $x \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$ tal que $\lambda x = Ax$, então $e^{\lambda t}x = T(t)x$. Ou seja, x é um autovetor de $T(t)$ associado ao autovalor $e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t))$

$$\therefore e^{t\sigma_p(A)} \subseteq \sigma_p(T(t)).$$

Sejam $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ os autovetores aproximados de A correspondentes ao autovalor aproximado $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. Assim,

$$\|e^t x_n - T(t)x_n\| \leq c\|\lambda x_n - Ax_n\| \to 0$$

conforme $n \to \infty$, para alguma contante $c > 0$. Ou seja, (x_n) são autovetores aproximados de $T(t)$ associados a $e^{\lambda t} \in \sigma_{ap}(T(t))$, $\forall t \geq 0$

$$\therefore e^{t\sigma_{ap}(A)} \subseteq \sigma_{ap}(T(t)).$$

Finalmente, se $(I - A)\mathcal{D}(A) \neq X$ não for denso em X, pelo lema segue que $Im(e^{\lambda t}I - T(t)) \subset Im(\lambda - A)$ também não é

$$\therefore e^{t\sigma_r(A)} \subseteq \sigma_r(T(t)). \blacksquare$$

TME pontual

Teorema do Mapeamento Espectral para o Espectro Pontual

Seja A um gerador para o C_0-semigrupo $T(.)$. Então vale

$$\sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(A)}, \forall t \geq 0.$$

<u>Prova</u>: Basta mostrar $\sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} \subseteq e^{t\sigma_p(A)}$.
Tome $t_0 > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in X \setminus \{0\}$ tais que $e^{\lambda t_0}x = T(t_0)x$. Daí podemos "reparametrizar" o problema para a seguinte forma:
Considere $t_0 A - log(\lambda)$ o gerador do C_0-semigrupo $(e^{-tlog\lambda}T(t_0 t))_{t\geq 0}$. Note que $T(t_0)x = x$, ou seja, 1 é autovalor de $-\lambda T(t_0)$ quando $t_0 = 1$ e $\lambda = 1$, de modo que podemos assumi-los assim desde o começo.

Agora, consideremos o subconjunto fechado $Y := \{y \in X \mid T(1)y = y\} \subset X$ não-trivial. É fácil ver que ele é $(T(t))_{t\geq 0}$-invariante. Daí o semigrupo $(T(t) \restriction_Y)_{t\geq 0}$ restrito a Y é periódico com período $\in \mathbb{N}^{-1}$. Por uma caracterização de semigrupos periódicos, podemos encontra um $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\mu := 2\pi i n \in \sigma_p(A \restriction_Y).$$

Mas $\sigma_p(A \restriction_Y) \subset \sigma_p(A)$, logo $1 \in \sigma_p(A) \therefore \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} \subseteq e^{t\sigma_p(A)}$,

$$\sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(A)}.$$

■

TME aproximado

Teorema do Mapeamento Espectral para o Espectro Aproximado

Seja A um gerador para o C_0-semigrupo $T(.)$. Então vale

$$\sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_{ap}(A)}, \ \forall t \geq 0.$$

A dificuldade de estender os arguentos anteriores reside no fato de que nem sempre $T(.)*$ é fortemente contínuo. E.g.: os adjuntos $T(.)*$ das translações à esquerda $T(.)$ em $L^1(\mathbb{R})$ são as translações à direita em $L^\infty(\mathbb{R})$, que não são fortemente contínuas.

Definição

O conjunto $X^\odot = \{x^* \in X^* \mid T(t)^* x^* \to x^* (t \to 0)\}$ é denominado o *dual sol* de X. Seu gerador é denotado por $A^\odot$.

Pode-se provar que $X^\odot$ é um subespaço fechado de X^* e invariante sob $T(.)^*$

As provas dos seguintes resultados serão omitidas:

$$\sigma_p(A^{\odot}) = \sigma_p(A^{\odot}) \quad e \quad \sigma_p(T(t)^{\odot}) = \sigma_p(T(t)^{\odot}), \forall t \geq 0,$$

$$\sigma(A^{\odot}) = \sigma(A^{\odot}) \quad e \quad \sigma(T(t)^{\odot}) = \sigma(T(t)^{\odot}), \forall t \geq 0.$$

Teorema do Mapeamento Espectral para o Espectro Residual

Seja A um gerador para o C_0-semigrupo $T(.)$. Então vale

$$\sigma_r(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_r(A)}, \ \forall t \geq 0.$$

Prova: Para $t \geq 0$, combinamos os resultados e obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_r(T(t)) \setminus \{0\} = \sigma_p(T(t)^*) \setminus \{0\} &= \sigma_p(T(t)^{\odot}) \setminus \{0\} \\
&= e^{t\sigma_p(A^*)} = e^{t\sigma_p(A^{\odot})} \\
&= e^{t\sigma_r(A)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Considerações e um exemplo

- O Teorema do Mapeamento Espectral falha quando não é possível "transportar" os autovetores aproximados de $T(t)$ para A.

A seguir, um modelo matemático na Biologia ilustra uma aplicação do teorema do mapeamento espectral. Trata-se de uma descrição do *problema da divisão celular*, em que estuda-se o comportamento e expansão das células de uma determinada espécie, levando-se em consideração sua taxa de reprodução, divisão e outros fatores.

Problema da Divisão Celular

Um problema de divisão celular

Seja $n = n(t) = \int_a^b u(t,s)\,ds$ o número de células de uma determinada espécie no tempo $t \geq 0$ e de tamanho $s \in [a, b]$. Vamos assumir que:

- Cada célula cresce em tamanho linearmente com o tempo a uma velocidade (normalizada) 1;
- Células de tamanho $s \geq \alpha > 0$ se dividem a uma taxa per capita $b(s) \geq 0$ em duas células filhas de tamanho igual, onde $b = 0$ em $[1, \infty]$ e $[\frac{\alpha}{2}, \alpha]$;
- Células de tamanho s morrem à uma taxa percapta $\mu(s) \geq 0$;
- As funções $b \neq 0$ e μ são contínuas e $\alpha > \frac{1}{2}$. Não existem células com $\frac{\alpha}{2}$.

Os tamanhos "interessantes" ocorrem no intervalo $J = [\frac{\alpha}{2}, 1]$ (pois no restante ocorre crescimento e morte).

Defina nosso espaço de estados $E := L^1(J)$, com

$\|u(t)\|_1 = \#$ células de "tamanho interessante" no tempo t.

$$\partial_t u(t,s) = \partial_s u(t,s) - \mu(s) u(t,s) - b(s) u(s,t) + 4 b(2s) u(t,2s), \quad t \geq 0, \ s \in J$$

$$u(t, \tfrac{\alpha}{2}) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(0,s) = u_0(s), \quad s \in J.$$

Note que $b(2s) = 0$, $\forall s \geq \frac{1}{2}$.

Para tal s, defina $v(2s) := 0$, $\forall v \in E$. Tome $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, onde

$$\mathcal{D}(A) := \{ v \in W^{1,1}(J) \mid v(\tfrac{\alpha}{2}) = 0 \},$$

$$Av := -v' - \mu v - bv + Bv,$$

com $Bv(s) = 4b(2s)\,v(2s)$.

- Note que $B \in \mathcal{B}(E)$ já que:

$$\|Bv\|_1 = 4\|b\|_\infty \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}} |v(2s)|\,ds \leq 2\|b\|_\infty \|v\|_1$$

$-\frac{d}{ds}$ com domínio $\mathcal{D}(A)$ é gerador de um C_0-semigrupo em E (translações nilpotentes)

$u(t,s) = (T(t)u_0)(s)$, $t \geq 0$, $s \in J$
$\cap$
$C^1(\mathbb{R}_+, E) \cap C(\mathbb{R}_+, W^{1,1}(J))$ e resolve a equação (e a primeira linha vale para q.t. $s \in J$).

Por outro lado, cada solução $u \in C^1(\mathbb{R}_+, E) \cap C(\mathbb{R}_+, W^{1,1}(J))$ do sistema é dada por $T(\cdot)$.

$D(A) \hookrightarrow E$ é compacto

$\therefore$ $R_\lambda(A)$ é compacto, logo $\sigma(A)$ consiste apenas de autovalores, que podem ser determinados pelas raízes de uma função holomórfica.

Referências Bibliográficas

Engel, K., Nagel, R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* **63,***Semigroup Forum*, 2001.

Schnaubelt, Roland *Lecture Notes on Evolution Equations.* Karlsruhe, 2019.