O teorema de aproximação de Trotter-Kato

Eduardo Longa

Universidade de São Paulo

Porto Alegre, 26 de Junho de 2020

Resumo

Definições e resultados principais

A letra X sempre denotará um espaço de Banach fixado.

A letra X sempre denotará um espaço de Banach fixado.

Uma família $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores limitados de X é um **semigrupo de operadores limitados** em X se

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, quaisquer que sejam $0 \leq s, t < \infty$.

A letra X sempre denotará um espaço de Banach fixado.

Uma família $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores limitados de X é um **semigrupo de operadores limitados** em X se

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, quaisquer que sejam $0 \leq s, t < \infty$.

O operador $A : \mathcal{D}(A) \to X$ dado por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

é chamado **gerador infinitesimal** do semigrupo $T(t)$.

Um semigrupo $T(t)$ de operadores limitados em X é dito um C_0 **semigrupo** se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Um semigrupo $T(t)$ de operadores limitados em X é dito um C_0 **semigrupo** se

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1

Seja $T(t)$ um C_0 semigrupo em X. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Um semigrupo $T(t)$ de operadores limitados em X é dito um C_0 **semigrupo** se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1

Seja $T(t)$ um C_0 semigrupo em X. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Teorema 2

Seja A o gerador infinitesimal do C_0 semigrupo $T(t)$. Então A é um operador fechado e $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X. Em particular, cada operador A^n é densamente definido.

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ um operador linear. Lembremos que o **conjunto resolvente** de A é

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e é limitado}\}$$

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ um operador linear. Lembremos que o **conjunto resolvente** de A é

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e é limitado}\}$$

O operador $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, é chamado de **operador resolvente** de A.

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ um operador linear. Lembremos que o **conjunto resolvente** de A é

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e é limitado}\}$$

O operador $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, é chamado de **operador resolvente** de A.

Teorema 3

Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$ em X satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $0 \leq t < \infty$ se, e somente se,

(i) *A é fechado e densamente definido*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém o semiplano $\{\mathrm{Re}\, z > \omega\}$ e*

$$\|R_\lambda(A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

É possível provar que se $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ é fechado e $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

É possível provar que se $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ é fechado e $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

Isto motiva a próxima definição.

É possível provar que se $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ é fechado e $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

Isto motiva a próxima definição.

Seja $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto qualquer. Dizemos que uma família $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ de operadores lineares limitados em X é um **pseudo-resolvente** em Δ se

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) J(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \Delta.$$

Proposição 4

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$, *um pseudo-resolvente em* Δ. *Então* $\ker(J(\lambda))$ *e* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *não dependem de* $\lambda \in \Delta$.

Proposição 4

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$*, um pseudo-resolvente em* Δ*. Então* $\ker(J(\lambda))$ *e* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *não dependem de* $\lambda \in \Delta$*.*

Prova: Reescrevendo a equação que define o pseudo-resolvente $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ da forma

$$J(\lambda) = J(\mu)[I + (\mu - \lambda)J(\lambda)],$$

vemos que $\mathrm{R}(J(\lambda)) \subseteq \mathrm{R}(J(\mu))$, e por simetria vale a igualdade.

Proposição 4

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$*, um pseudo-resolvente em* Δ*. Então* $\ker(J(\lambda))$ *e* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *não dependem de* $\lambda \in \Delta$*.*

Prova: Reescrevendo a equação que define o pseudo-resolvente $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ da forma

$$J(\lambda) = J(\mu)[I + (\mu - \lambda)J(\lambda)],$$

vemos que $\mathrm{R}(J(\lambda)) \subseteq \mathrm{R}(J(\mu))$, e por simetria vale a igualdade. Também é fácil ver que $\ker(J(\mu)) \subseteq \ker(J(\lambda))$, e por simetria vale a igualdade. $\square$

Quando um pseudo-resolvente é o resolvente genuíno de um operador linear?

Quando um pseudo-resolvente é o resolvente genuíno de um operador linear?

Teorema 5

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$, *um pseudo-resolvente em* Δ. *Então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A *se, e somente se,* $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$ *e* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X.

Quando um pseudo-resolvente é o resolvente genuíno de um operador linear?

Teorema 5

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$, *um pseudo-resolvente em* Δ. *Então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A *se, e somente se,* $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$ *e* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X.

Prova: Uma implicação é óbvia: se $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ é o conjunto de operadores resolventes do operador fechado e densamente definido A, então $J(\lambda) : X \to \mathcal{D}(A)$ é um isomorfismo.

Provemos a recíproca.

Provemos a recíproca. Suponhamos que $\ker(J(\lambda)) = 0$ e que $\mathrm{R}(J(\lambda))$ é denso em X. Enão $J(\lambda) : X \to \mathrm{R}(J(\lambda))$ é um isomorfismo.

Provemos a recíproca. Suponhamos que $\ker(J(\lambda)) = 0$ e que $\mathrm{R}(J(\lambda))$ é denso em X. Enão $J(\lambda) : X \to \mathrm{R}(J(\lambda))$ é um isomorfismo. Para $\lambda_0 \in \Delta$ fixado, definamos

$$A = \lambda_0 - J(\lambda_0)^{-1}.$$

O operador A tem domínio $\mathcal{D}(A) = \mathrm{R}(J(\lambda_0))$ (denso em X) e é linear e fechado.

Provemos a recíproca. Suponhamos que $\ker(J(\lambda)) = 0$ e que $\mathrm{R}(J(\lambda))$ é denso em X. Enão $J(\lambda) : X \to \mathrm{R}(J(\lambda))$ é um isomorfismo. Para $\lambda_0 \in \Delta$ fixado, definamos

$$A = \lambda_0 - J(\lambda_0)^{-1}.$$

O operador A tem domínio $\mathcal{D}(A) = \mathrm{R}(J(\lambda_0))$ (denso em X) e é linear e fechado. Note que

$$(\lambda_0 - A)J(\lambda_0) = J(\lambda_0)(\lambda_0 - A) = I,$$

donde segue que $J(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$.

E para $\lambda \in \Delta$ qualquer?

E para $\lambda \in \Delta$ qualquer? Temos

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)J(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda) \\
&= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I
\end{aligned}$$

E para $\lambda \in \Delta$ qualquer? Temos

$$\begin{aligned}(\lambda - A)J(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda)\\ &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)]\\ &= I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda_0)J(\lambda)]\\ &= I\end{aligned}$$

Analogamente, $J(\lambda)(\lambda - A) = I$.

E para $\lambda \in \Delta$ qualquer? Temos

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)J(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda) \\
&= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda_0)J(\lambda)] \\
&= I
\end{aligned}$$

Analogamente, $J(\lambda)(\lambda - A) = I$. Logo, $J(\lambda) = R_\lambda(A)$. Em particular, A só depende de $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$. $\square$

Há um critério mais prático?

Há um critério mais prático?

Teorema 6

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ilimitado e $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ um pseudo-resolvente em Δ. Se $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em X e existe uma sequência $\lambda_n \in \Delta$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$ e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M$$

para certo $M \geq 0$, então $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido A.

Há um critério mais prático?

Teorema 6

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *ilimitado e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ *um pseudo-resolvente em* Δ*. Se* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X *e existe uma sequência* $\lambda_n \in \Delta$ *tal que* $|\lambda_n| \to \infty$ *e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M$$

para certo $M \geq 0$*, então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A*.*

Prova: Vamos mostrar que $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$.

Há um critério mais prático?

Teorema 6

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *ilimitado e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ *um pseudo-resolvente em* Δ*. Se* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X *e existe uma sequência* $\lambda_n \in \Delta$ *tal que* $|\lambda_n| \to \infty$ *e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M$$

para certo $M \geq 0$*, então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A*.*

Prova: Vamos mostrar que $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$.Da hipótese decorre que $\|J(\lambda_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Há um critério mais prático?

Teorema 6

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *ilimitado e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ *um pseudo-resolvente em* Δ*. Se* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X *e existe uma sequência* $\lambda_n \in \Delta$ *tal que* $|\lambda_n| \to \infty$ *e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M$$

para certo $M \geq 0$*, então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda\in\Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A*.*

Prova: Vamos mostrar que $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$.Da hipótese decorre que $\|J(\lambda_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Da equação que define o pseudo-resolvente, deduzimos então que

$$\|(\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\mu))\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Assim, se x está na imagem de $J(\mu)$, vale que $\lambda_n J(\lambda_n)x \to x$ quando $n \to \infty$.

Mas como a imagem de $J(\mu)$ é densa em X e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, vale que $\lambda_n J(\lambda_n)x \to x$ para todo $x \in X$.

Mas como a imagem de $J(\mu)$ é densa em X e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, vale que $\lambda_n J(\lambda_n)x \to x$ para todo $x \in X$.

Seja agora $x \in \ker(J(\mu))$.

Mas como a imagem de $J(\mu)$ é densa em X e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, vale que $\lambda_n J(\lambda_n)x \to x$ para todo $x \in X$.

Seja agora $x \in \ker(J(\mu))$. Então $\lambda_n J(\lambda_n)x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e deduzimos que $x = 0$.

Mas como a imagem de $J(\mu)$ é densa em X e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, vale que $\lambda_n J(\lambda_n)x \to x$ para todo $x \in X$.

Seja agora $x \in \ker(J(\mu))$. Então $\lambda_n J(\lambda_n)x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e deduzimos que $x = 0$. Portanto, $\ker(J(\lambda)) = 0$, como afirmado. □

Os personagens e o teorema

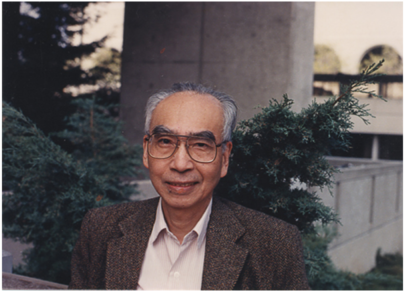
Os personagens

- Americano-Canadense
- PhD em Princeton (1956) : semigrupos
- Probabilidade, Teoria de Grupos, Teoria de Números, Combinatória, Teoria de Nós.

Hale F. Trotter (1931 –)

Os personagens

- Japonês
- PhD na Universidade de Tóquio (1951)
- EDPs, Física Matemática, Análise Funcional.



Tosio Kato (1917 – 1999)

Pacific Journal of Mathematics

APPROXIMATION OF SEMI-GROUPS OF OPERATORS

HALE TROTTER

APPROXIMATION OF SEMI-GROUPS OF OPERATORS

H. F. TROTTER

1. Introduction. The usual methods for numerically computing the solution of a partial differential equation consist in replacing the differential operators by difference operators which approximate them, and taking the solution of the resulting difference equation as an approximation to the solution of the original equation. The question of *convergence* then arises; that is, when will a sequence of difference equations have the property that their solutions converge to the solution of a given differential equation? We treat this question in an operator-theoretic fashion, and our discussion has much in common with that of Lax and Richtmyer [17], as is pointed out in more detail below. The reader is referred to the bibliography of [17] for a list of the principal papers dealing with this question of convergence.

Our discussion will be limited to the initial value problem (Cauchy problem) for linear equations in the form

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Omega u(t,x)\,;\; u(0,x) = f(x) \tag{1.1}$$

in which Ω is linear and constant in time. Here t is a non-negative real variable, and x is a point in some space S. Equation (1.1) is formally of parabolic type, but, as is shown in [**14**, Chap. XX], the initial value problem for hyperbolic equations can also be put into this form. Lateral conditions (i.e., boundary conditions such as are needed for the heat equation on a finite interval) are considered to be incorporated into the definition of Ω as restrictions on its domain [**8**, **17**].

The process of setting up a sequence of finite difference approximations to (1.1) may be described in the following general terms. For each n, take a positive number h_n and a set $S_n \subset S$ whose points form a suitable grid. The solution to the nth approximating equation is defined inductively, for t an integral multiple of h_n and x a point of S_n by the following system of equations:[1]

[1] Sometimes only the space variable is made discrete, so that u_n is defined by a finite set of simultaneous *differential* equations (cf. [**13**, p. 233]). Theorem 5.2 can be applied to this situation just as Theorem 5.3 can be applied to the case in which the time variable is made discrete and the u_n are defined by (1.2).

This paper was originally accepted by the Transactions of the American Mathematical Society, Received July 3, 1957, by Trans. Amer. Math. Soc. Research done at Princeton University and supported in part by the Office of Ordnance Research U.S. Army.

O Teorema

A notação $A \in G(M, \omega)$ significa que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$ em X tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

O Teorema

A notação $A \in G(M, \omega)$ significa que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$ em X tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

Teorema A (Trotter-Kato)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $A_n \in G(M, \omega)$ e $T_n(t)$ o C_0 semigrupo gerado por A_n. Se existir $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ tal que

(i) *Para todo $x \in X$, vale que $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ quando $n \to \infty$ e*

(ii) *a imagem de $R(\lambda_0)$ é densa em X,*

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ tal que $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$. Se $T(t)$ é o C_0 semigrupo gerado por A, então $T_n(t)x \to T(t)x$ se $n \to \infty$, para todos $x \in X$ e $t \geq 0$. O limite é uniforme em t para t em intervalos limitados.

O Teorema de Trotter-Kato seguirá de 3 resultados.

O Teorema de Trotter-Kato seguirá de 3 resultados.

Lema 7

Sejam A e B os geradores infinitesimais dos C_0 semigrupos $T(t)$ e $S(t)$. Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, temos

$$R_\lambda(B)[T(t) - S(t)]R_\lambda(A)x = \int_0^t S(t-s)[R_\lambda(A) - R_\lambda(B)]T(s)x \,\mathrm{d}s$$

O Teorema de Trotter-Kato seguirá de 3 resultados.

Lema 7

Sejam A e B os geradores infinitesimais dos C_0 semigrupos $T(t)$ e $S(t)$. Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, temos

$$R_\lambda(B)[T(t) - S(t)]R_\lambda(A)x = \int_0^t S(t-s)[R_\lambda(A) - R_\lambda(B)]T(s)x \,\mathrm{d}s$$

Prova: Derivemos a função $s \mapsto S(t-s)R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[S(t-s)R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)x] = &- S(t-s)BR_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)x \\ &+ S(t-s)R_\lambda(B)T(s)AR_\lambda(A)x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cdots &= -S(t-s)BR_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)x + S(t-s)R_\lambda(B)T(s)AR_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[-BR_\lambda(B)T(s) + R_\lambda(B)T(s)A]R_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[(-\lambda + \lambda - B)R_\lambda(B)T(s) + R_\lambda(B)T(s)(-\lambda + A + \lambda)]R_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[-\lambda R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A) + T(s)R_\lambda(A) \\
&\qquad\qquad - R_\lambda(B)T(s) + \lambda R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)]x \\
&= S(t-s)[R_\lambda(A) - R_\lambda(B)]T(s)x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdots &= -S(t-s)BR_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)x + S(t-s)R_\lambda(B)T(s)AR_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[-BR_\lambda(B)T(s) + R_\lambda(B)T(s)A]R_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[(-\lambda + \lambda - B)R_\lambda(B)T(s) + R_\lambda(B)T(s)(-\lambda + A + \lambda)]R_\lambda(A)x \\
&= S(t-s)[-\lambda R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A) + T(s)R_\lambda(A) \\
&\qquad\qquad - R_\lambda(B)T(s) + \lambda R_\lambda(B)T(s)R_\lambda(A)]x \\
&= S(t-s)[R_\lambda(A) - R_\lambda(B)]T(s)x
\end{aligned}
$$

Basta agora integrar de $s = 0$ até $s = t$. $\square$

Teorema 8

Sejam $A, A_n \in G(M, \omega)$ e sejam $T(t)$ e $T_n(t)$ os C_0 semigrupos gerados por A e A_n, respectivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, vale que $R_\lambda(A_n)x \to R_\lambda(A)x$ quando $n \to \infty$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, vale que $T_n(t)x \to T(t)x$ quando $n \to \infty$.*

Além disso, a convergência em (b) é uniforme para t em intervalos limitados.

Teorema 8

Sejam $A, A_n \in G(M, \omega)$ e sejam $T(t)$ e $T_n(t)$ os C_0 semigrupos gerados por A e A_n, respectivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, vale que $R_\lambda(A_n)x \to R_\lambda(A)x$ quando $n \to \infty$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, vale que $T_n(t)x \to T(t)x$ quando $n \to \infty$.*

Além disso, a convergência em (b) é uniforme para t em intervalos limitados.

Prova: $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ Fixemos $x \in X$ e $t \in [0, T]$. Daí:

$$\begin{aligned} \|(T_n(t) - T(t))R_\lambda(A)x\| &\leq \|T_n(t)(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \\ &+ \|R_\lambda(A_n)(T_n(t) - T(t))x\| \\ &+ \|(R_\lambda(A_n) - R_\lambda(A))T(t)x\| \\ &= D_1 + D_2 + D_3 \end{aligned}$$

Como $\|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq Me^{\omega T}$, temos:

$$D_1 = \|T_n(t)(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \leq Me^{\omega T}\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \to 0.$$

Como $\|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq Me^{\omega T}$, temos:

$$D_1 = \|T_n(t)(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \leq Me^{\omega T}\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \to 0.$$

Já que $t \mapsto T(t)x$ é contínua, o conjunto $\{T(t)x : t \in [0, T]\}$ é compacto, logo

$$D_3 = \|(R_\lambda(A_n) - R_\lambda(A))T(t)x\| \to 0.$$

Como $\|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq Me^{\omega T}$, temos:

$$D_1 = \|T_n(t)(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \leq Me^{\omega T}\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))x\| \to 0.$$

Já que $t \mapsto T(t)x$ é contínua, o conjunto $\{T(t)x : t \in [0, T]\}$ é compacto, logo

$$D_3 = \|(R_\lambda(A_n) - R_\lambda(A))T(t)x\| \to 0.$$

Agora, pelo Lema anterior (com $B = A_n$ e $S = T_n$), temos:

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(A_n)(T_n(t) - T(t))R_\lambda(A)x\| &= \left\|\int_0^t T_n(t-s)[R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n)]T(s)x \,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leq \int_0^T \|T_n(t-s)\|\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))T(s)x\| \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Temos a seguinte cota para o último integrando:

$$\|T_n(t-s)\|\|(R_\lambda(A)-R_\lambda(A_n))T(s)x\| \leq (Me^{\omega(t-s)})\left(\frac{2M}{\lambda-\omega}\right)(Me^{\omega s})\|x\|$$
$$\leq \frac{2M^3e^{2\omega T}}{\lambda-\omega}\|x\|.$$

Temos a seguinte cota para o último integrando:

$$\|T_n(t-s)\|\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))T(s)x\| \leq (Me^{\omega(t-s)})\left(\frac{2M}{\lambda-\omega}\right)(Me^{\omega s})\|x\|$$
$$\leq \frac{2M^3e^{2\omega T}}{\lambda-\omega}\|x\|.$$

Logo, como o integrando tende a zero quando $n \to \infty$, o Teorema da Convergência Limitada implica que

$$\lim_{n\to\infty}\|R_\lambda(A_n)(T_n(t) - T(t))R_\lambda(A)x\| = 0$$

uniformemente em $[0, T]$.

Temos a seguinte cota para o último integrando:

$$\|T_n(t-s)\|\|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_n))T(s)x\| \leq (Me^{\omega(t-s)})\left(\frac{2M}{\lambda-\omega}\right)(Me^{\omega s})\|x\|$$
$$\leq \frac{2M^3 e^{2\omega T}}{\lambda - \omega}\|x\|.$$

Logo, como o integrando tende a zero quando $n \to \infty$, o Teorema da Convergência Limitada implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|R_\lambda(A_n)(T_n(t) - T(t))R_\lambda(A)x\| = 0$$

uniformemente em $[0, T]$. Note que todo $x \in \mathcal{D}(A)$ pode ser escrito como $x = R_\lambda(A)y$ para algum $y \in X$. Segue que

$$D_2 = \|R_\lambda(A_n)(T_n(t) - T(t))x\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

para $x \in \mathcal{D}(A)$, uniformemente em $[0, T]$.

Mas então,

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t) - T(t))x\| = 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A^2)$, uniformemente em $[0, T]$.

Mas então,

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t) - T(t))x\| = 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A^2)$, uniformemente em $[0, T]$. Já que $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X e $\|T_n(t) - T(t)\|$ é uniformemente limitado em $[0, T]$, o resultado em (1) vale para todo $x \in X$, como queríamos.

Mas então,

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t) - T(t))x\| = 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A^2)$, uniformemente em $[0, T]$. Já que $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X e $\|T_n(t) - T(t)\|$ é uniformemente limitado em $[0, T]$, o resultado em (1) vale para todo $x \in X$, como queríamos.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Fixemos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Então

$$\|R_\lambda(A_n)x - R_\lambda(A)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|T_n(t)x - T(t)x\|\,\mathrm{d}t$$

Mas então,

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t) - T(t))x\| = 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A^2)$, uniformemente em $[0, T]$. Já que $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X e $\|T_n(t) - T(t)\|$ é uniformemente limitado em $[0, T]$, o resultado em (1) vale para todo $x \in X$, como queríamos.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Fixemos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Então

$$\|R_\lambda(A_n)x - R_\lambda(A)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|T_n(t)x - T(t)x\| \,\mathrm{d}t$$

O integrando tende a zero quando $n \to \infty$ pois estamos assumindo que $\|T_n(t)x - T(t)x\| \to 0$.

Mas então,

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t) - T(t))x\| = 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A^2)$, uniformemente em $[0, T]$. Já que $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X e $\|T_n(t) - T(t)\|$ é uniformemente limitado em $[0, T]$, o resultado em (1) vale para todo $x \in X$, como queríamos.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Fixemos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Então

$$\|R_\lambda(A_n)x - R_\lambda(A)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|T_n(t)x - T(t)x\|\,\mathrm{d}t$$

O integrando tende a zero quando $n \to \infty$ pois estamos assumindo que $\|T_n(t)x - T(t)x\| \to 0$. Então (a) segue do Teorema da Convergência Dominada. $\square$

Passemos ao terceiro resultado.

Passemos ao terceiro resultado.

Teorema 9

Seja $A_n \in G(M, \omega)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Se existe* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ *tal que*

(a) *para todo* $x \in X$ *vale que* $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X,

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$.

Passemos ao terceiro resultado.

Teorema 9

Seja $A_n \in G(M, \omega)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Se existe* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ *tal que*

(a) *para todo* $x \in X$ *vale que* $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X*,*

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$*.*

Prova: Note que se $S_n(t) = e^{-\omega t} T_n(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e o gerador infinitesimal de $S_n(t)$ é $A_n - \omega I$.

Passemos ao terceiro resultado.

Teorema 9

Seja $A_n \in G(M, \omega)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Se existe* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ *tal que*

(a) *para todo* $x \in X$ *vale que* $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X*,*

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$*.*

Prova: Note que se $S_n(t) = e^{-\omega t} T_n(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e o gerador infinitesimal de $S_n(t)$ é $A_n - \omega I$. Assim, podemos supor que $\omega = 0$.

Passemos ao terceiro resultado.

Teorema 9

Seja $A_n \in G(M, \omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ tal que

(a) *para todo $x \in X$ vale que $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ quando $n \to \infty$ e*

(b) *a imagem de $R(\lambda_0)$ é densa em X,*

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ tal que $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$.

Prova: Note que se $S_n(t) = e^{-\omega t} T_n(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e o gerador infinitesimal de $S_n(t)$ é $A_n - \omega I$. Assim, podemos supor que $\omega = 0$. Mostremos que, dado $x \in X$, vale que $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n \geq 1}$ converge, para todo λ tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Passemos ao terceiro resultado.

Teorema 9

Seja $A_n \in G(M, \omega)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Se existe* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ *tal que*

(a) *para todo* $x \in X$ *vale que* $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(b) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X,

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$.

Prova: Note que se $S_n(t) = e^{-\omega t} T_n(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e o gerador infinitesimal de $S_n(t)$ é $A_n - \omega I$. Assim, podemos supor que $\omega = 0$. Mostremos que, dado $x \in X$, vale que $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n \geq 1}$ converge, para todo λ tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Seja

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0 \text{ e } \{R_\lambda(A_n)x\}_{n \geq 1} \text{ converge}\}$$

Vamos provar que S é aberto e fechado em $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ (é não vazio pois $\lambda_0 \in S$).

Seja $\mu \in S$ e vamos expandir $R_\lambda(A_n)$ em série de Taylor em torno de μ:

$$R_\lambda(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu(A_n)^{k+1}.$$

Seja $\mu \in S$ e vamos expandir $R_\lambda(A_n)$ em série de Taylor em torno de μ:

$$R_\lambda(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu(A_n)^{k+1}.$$

Mas como $\|R_\mu(A_n)^k\| \leq M(\operatorname{Re}\mu)^{-k}$, a série acima converge (como operador) para todo λ que satisfaz $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} < 1$, e a convergência é uniforme em λ se $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$.

Seja $\mu \in S$ e vamos expandir $R_\lambda(A_n)$ em série de Taylor em torno de μ:

$$R_\lambda(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu(A_n)^{k+1}.$$

Mas como $\|R_\mu(A_n)^k\| \leq M(\operatorname{Re}\mu)^{-k}$, a série acima converge (como operador) para todo λ que satisfaz $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} < 1$, e a convergência é uniforme em λ se $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Utilizando a sequência constante $\sum_{k=0}^{\infty} M\theta^{k+1}$ como limitante superior, segue que a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1}$ converge para todo λ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Logo S é aberto.

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$.

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Pelo que acabamos de provar, a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1}$ converge, isto é, $\lambda \in S$.

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Pelo que acabamos de provar, a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1}$ converge, isto é, $\lambda \in S$.
Conclusão:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0 \text{ e } \{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1} \text{ converge}\} = \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\mathrm{Re}\,\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Pelo que acabamos de provar, a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1}$ converge, isto é, $\lambda \in S$.
Conclusão:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \text{ e } \{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1} \text{ converge}\} = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$$

Para cada $\lambda \in S$, definamos $R(\lambda) : X \to X$ por

$$R(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} R_\lambda(A_n)x.$$

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \le \theta < 1$. Pelo que acabamos de provar, a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\ge 1}$ converge, isto é, $\lambda \in S$.
Conclusão:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0 \text{ e } \{R_\lambda(A_n)x\}_{n\ge 1} \text{ converge}\} = \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

Para cada $\lambda \in S$, definamos $R(\lambda) : X \to X$ por

$$R(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} R_\lambda(A_n)x.$$

Como $R_\lambda(A_n)$ é o operador resolvente de A_n, vale que

$$R_\lambda(A_n) - R_\mu(A_n) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A_n)R_\mu(A_n).$$

Seja agora λ um ponto de acumulação de S com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $0 < \theta < 1$, existe $\mu \in S$ tal que $|\mu - \lambda|(\operatorname{Re}\mu)^{-1} \leq \theta < 1$. Pelo que acabamos de provar, a sequência $\{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1}$ converge, isto é, $\lambda \in S$.
Conclusão:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0 \text{ e } \{R_\lambda(A_n)x\}_{n\geq 1} \text{ converge}\} = \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

Para cada $\lambda \in S$, definamos $R(\lambda) : X \to X$ por

$$R(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} R_\lambda(A_n)x.$$

Como $R_\lambda(A_n)$ é o operador resolvente de A_n, vale que

$$R_\lambda(A_n) - R_\mu(A_n) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A_n)R_\mu(A_n).$$

Passando ao limite, concluímos que

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

Isto diz que $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in S}$ é um pseudo-resolvente em S.

Isto diz que $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in S}$ é um pseudo-resolvente em S. Como a imagem de $R(\lambda)$ independe de λ, segue da hipótese (b) que esta imagem é densa em X.

Isto diz que $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in S}$ é um pseudo-resolvente em S. Como a imagem de $R(\lambda)$ independe de λ, segue da hipótese (b) que esta imagem é densa em X. Além disso, é claro que

$$\|R(\lambda)^k\| \leq M(\operatorname{Re}\lambda)^{-k}, \quad \forall \lambda \in S, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Isto diz que $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in S}$ é um pseudo-resolvente em S. Como a imagem de $R(\lambda)$ independe de λ, segue da hipótese (b) que esta imagem é densa em X. Além disso, é claro que

$$\|R(\lambda)^k\| \leq M(\operatorname{Re}\lambda)^{-k}, \quad \forall \lambda \in S, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando $k = 1$, temos, em particular, que vale

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq \frac{M|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda} = M, \quad \forall \lambda > 0.$$

Isto diz que $\{R(\lambda)\}_{\lambda\in S}$ é um pseudo-resolvente em S. Como a imagem de $R(\lambda)$ independe de λ, segue da hipótese (b) que esta imagem é densa em X. Além disso, é claro que

$$\|R(\lambda)^k\| \leq M(\operatorname{Re}\lambda)^{-k}, \quad \forall \lambda \in S, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando $k = 1$, temos, em particular, que vale

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq \frac{M|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda} = M, \quad \forall \lambda > 0.$$

Segue dos teoremas seguintes que existe um único operador fechado e densamente definido A tal que $R(\lambda) = R_\lambda(A)$ e $A \in G(M, 0)$. Isto conclui a prova. $\square$

Teorema 10 ("Critério prático")

Sejam $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ *ilimitado e* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ *um pseudo-resolvente em* Δ. *Se* $\mathrm{R}(J(\lambda))$ *é denso em* X *e existe uma sequência* $\lambda_n \in \Delta$ *tal que* $|\lambda_n| \to \infty$ *e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M$$

para certo $M \geq 0$, *então* $\{J(\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ *é a família de operadores resolventes de um único operador linear fechado e densamente definido* A.

Teorema 11

Um operador linear A *é o gerador infinitesimal de um* C_0 *semigrupo* $T(t)$ *em* X *satisfazendo* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $0 \leq t < \infty$ *se, e somente se,*

(i) *A é fechado e densamente definido*

(ii) *O conjunto resolvente* $\rho(A)$ *contém o semiplano* $\{\mathrm{Re}\, z > \omega\}$ *e*

$$\|R_\lambda(A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

Lembremos do enunciado do Teorema de Trotter-Kato:

Teorema A (Trotter-Kato)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *sejam* $A_n \in G(M, \omega)$ *e* $T_n(t)$ *o* C_0 *semigrupo gerado por* A_n. *Se existir* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$ *tal que*

(i) *Para todo* $x \in X$, *vale que* $R_{\lambda_0}(A_n)x \to R(\lambda_0)x$ *quando* $n \to \infty$ *e*

(ii) *a imagem de* $R(\lambda_0)$ *é densa em* X,

então existe um único operador $A \in G(M, \omega)$ *tal que* $R(\lambda_0) = R_{\lambda_0}(A)$. *Se* $T(t)$ *é o* C_0 *semigrupo gerado por* A, *então* $T_n(t)x \to T(t)x$ *se* $n \to \infty$, *para todos* $x \in X$ *e* $t \geq 0$. *O limite é uniforme em* t *para* t *em intervalos limitados.*

Conclusão

Em suma, o Teorema de Trotter-Kato relaciona convergências de C_0 semigrupos com convergências dos respectivos geradores infinitesimais.

Conclusão

Em suma, o Teorema de Trotter-Kato relaciona convergências de C_0 semigrupos com convergências dos respectivos geradores infinitesimais.

Aplicações:

(i) EDP's parabólicas: aproximar a equação e mostrar que as soluções aproximadas convergem

(ii) Passeios aleatórios e processos de difusão: prever o comportamento de muitas partículas

Referências

- A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.
- H. F. Trotter, *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math. Vol. 8, Number 4 (1958), 887–919.