Perturbações

Bianca Paolini Lorenzi

18 de junho de 2020

Sumário

1 Introdução

O objetivo do presente trabalho é estudar perturbações por operadores lineares B dos geradores infinitesimais A de semigrupos fortemente contínuos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em duas situações: (i) quando B é limitado e, (ii) quando temos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de contrações e B é dissipativo e satisfaz uma desigualdade de interpolação.

Demonstramos que, em ambos os casos, a adição do operador B ao gerador infinitesimal A de um semigrupo fortemente contínuo (de contrações) não altera essa característica. No caso (i), inclusive, obtemos uma representação explícita para o semigrupo fortemente contínuo gerado por $A + B$ e discutimos um pouco quais propriedades de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ são preservadas quando A é perturbado por B.

Observamos que esse tema se mostra particularmente importante no que diz respeito, por exemplo, à análise da solução do problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u^{'}(t) = Au(t),\ t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

quando tal equação é perturbada. Em outras palavras, seremos capazes de responder à pergunta: "quando substituímos A por $A+B$ nessa equação, o que acontece com a solução ?".

2 Perturbações por operadores lineares limitados

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Comecemos por uma lema técnico que fornece uma norma equivalente em X,

Lema 2.1. *Seja A um operador linear tal que $\rho(A) \supset]\omega, \infty[$. Se*

$$\| (\lambda-\omega)^n R(\lambda, A)^n \| \leq M, \text{ para } n = 1, 2, ..., \lambda > \omega. \tag{1}$$

Então, existe uma norma $|\cdot|$ em X que é equivalente à norma original $\|\cdot\|$ em X e satisfaz:

$$\| x \| \leq |x| \leq M \| x \|, \text{ para } x \in X \tag{2}$$

e

$$|(\lambda-\omega) R(\lambda, A) x| \leq |x|, \text{ para } x \in X, \lambda > \omega. \tag{3}$$

Demostração:

Seja $\mu > \omega$ e definamos

$$\| x \|_\mu = \sup_{n \geq 0} \| (\mu-\omega)^n R(\mu, A)^n x \|$$

Da linearidade do operador $R(\mu, A)$, do fato de ser injetor, das propriedades de $\|\cdot\|$ e do supremo, vemos que $\|\cdot\|_\mu$ é uma norma. Além disso, por um lado, se $n = 0$,

$$\| (\mu-\omega)^0 R(\mu, A)^0 x \| = \| x \|$$

donde

$$\| x \|_\mu = \sup_{n \geq 0} \| (\mu-\omega)^n R(\mu, A)^n x \| \geq \| x \| .$$

E, por outro, usando (1), para todo $n \geq 0$,

$$\| (\mu-\omega)^n R(\mu, A)^n x \| \leq \| (\mu-\omega)^n R(\mu, A)^n \| \| x \| \leq M \| x \|$$

e segue que,

$$\| x \|_\mu = \sup_{n \geq 0} \| (\mu-\omega)^n R(\mu, A)^n x \| \leq M \| x \|$$

Resumidamente, obtivemos

$$\| x \| \leq \| x \|_\mu \leq M \| x \| \tag{4}$$

Notemos que o lado direito da desigualdade (4) fornece uma limitação uniforme em μ para $\| x \|_\mu$. Observamos também que

$$\begin{aligned}
\| (\mu-\omega)R(\mu,A)\, x \|_\mu &= \sup_{n\geq 0} \| (\mu-\omega)^{n+1}R(\mu,A)^{n+1}x \| \\
&= \sup_{m\geq 1} \| (\mu-\omega)^{m}R(\mu,A)^{m}x \| \\
&\leq \sup_{m\geq 0} \| (\mu-\omega)^{m}R(\mu,A)^{m}x \| \\
&= \| x \|_\mu
\end{aligned}$$

Logo,

$$\| (\mu-\omega)R(\mu,A) \|_\mu \leq 1. \tag{5}$$

Neste ponto, afirmamos que

$$\| (\lambda-\omega)R(\lambda,A) \|_\mu \leq 1, \text{ para } \omega < \lambda \leq \mu \tag{6}$$

Com efeito, se $y = R(\lambda, A)x$, então usando uma das igualdades do resolvente (Identidade de Hilbert), podemos reescrever y como

$$\begin{aligned}
R(\lambda,A)x &= R(\mu,A)x + (R(\lambda,A)x - R(\mu,A)x) \\
&= R(\mu,A)x + (\mu-\lambda)R(\mu,A)R(\lambda,A)x \\
&= R(\mu,A)(x + (\mu-\lambda)y)
\end{aligned}$$

e, de (5), temos que para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| (\mu-\omega)^n R(\mu,A)^n y \| &\leq \| (\mu-\omega)^n R(\mu,A)^n R(\mu,A)x \| + \| (\mu-\omega)^n R(\mu,A)^n R(\mu,A)(\mu-\lambda)y \| \\
&\leq \frac{1}{\mu-\omega} \| (\mu-\omega)R(\mu,A)x \|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu-\omega} \| (\mu-\omega)R(\mu,A)y \|_\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu-\omega} \| x \|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu-\omega} \| y \|_\mu
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\| y \|_\mu \leq \frac{1}{\mu-\omega} \| x \|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu-\omega} \| y \|_\mu$$

o que implica que $(\lambda-\omega) \| y \|_\mu \leq \| x \|_\mu$, provando (6). De (4) e (6), temos que

$$\| (\lambda-\omega)^n R(\lambda,A)^n x \| \leq \| (\lambda-\omega)^n R(\lambda,A)^n x \|_\mu \leq \| x \|_\mu, \text{ para } \omega < \lambda \leq \mu \tag{7}$$

Tomando o supremo em $n \geq 0$ no lado esquerdo da desigualdade (7), encontramos $\| x \|_\lambda \leq \| x \|_\mu$ para $\omega < \lambda \leq \mu$. Então, para cada $x \in X$, $\{\| x \|_\mu\}_{\mu > \omega}$ é um sequência monótona limitada, sendo convergente. Podemos definir assim,

$$|x| = \lim_{\mu \to \infty} \| x \|_\mu$$

Concluimos que (2) segue de (4). E, com $n = 1$ em (7), temos $\| (\lambda - \omega) R(\lambda, A) x \|_\mu \leq \| x \|_\mu$ donde (3) vem de fazer $\mu \to \infty$ nessa expressão.

■

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ satisfazendo $\| T(t) \| \leq M e^{\omega t}$. Consideremos $K(t) = e^{-\omega t} T(t)$, um semigrupo fortemente contínuo com $\| K(t) \| \leq M$. Isso nos permite definir:

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \| K(t) x \| . \tag{8}$$

Devido às propriedades de semigrupo e da norma $\| \cdot \|$, vemos que $| \cdot |$ é de fato uma norma.

Por um lado,

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \| K(t) x \| \geq \| K(0) x \| = \| x \|$$

E, por outro, como $\| K(t) x \| \leq M \| x \|$, $\forall t \geq 0$,

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \| K(t) x \| \leq M \| x \|$$

Logo,

$$\| x \| \leq |x| \leq M \| x \|$$

e $| \cdot |$ é uma norma em X equivalente à norma original $\| \cdot \|$ em X.

Além disso,

$$\begin{aligned} |T(t)x| &= \sup_{s \geq 0} \| K(s) e^{\omega t} K(t) x \| \\ &= e^{\omega t} \sup_{s \geq t} \| K(s) x \| \\ &\leq e^{\omega t} \sup_{s \geq 0} \| K(s) x \| \\ &= e^{\omega t} |x| \end{aligned}$$

donde $|T(t)| \leq e^{\omega t}$.

A seguir, enunciamos e demonstramos o principal resultado dessa seção:

Teorema 2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ em X, satisfazendo $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$. Se B é um operador linear limitado em X, então $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $S(t)$ em X com $\| S(t) \| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.*

Demonstração

Como A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ com $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, temos, pelo Teorema 2 da aula 16, que A é fechado, densamente definido, $\rho(A) \supset]\omega, \infty[$ e $\| (\lambda - \omega)^n R(\lambda, A)^n \| \leq M$, para $n = 1, 2, ..., \lambda > \omega$. Desse modo, considerando a norma $| \cdot |$ fornecida pelo Lema 2.1, vale que $|T(t)| \leq e^{\omega t}$ e $|R(\lambda, A)| \leq (\lambda - \omega)^{-1}$ para $\lambda > \omega$.

Notemos que para $\lambda > \omega + |B|$, isto é, $\lambda - \omega > |B|$, o operador limitado $BR(\lambda, A)$ satisfaz

$$|BR(\lambda, A)| \leq |B||R(\lambda, A)| \leq |B|\frac{1}{\lambda - \omega} < |B|\frac{1}{|B|} < 1.$$

Pelo Teorema 1 da aula 2, segue que $I - BR(\lambda, A)$ é inversível para $\lambda > \omega + |B|$ com inversa limitada dada por $(I - BR(\lambda, A))^{-1} = \sum_{k \geq 0} (BR(\lambda, A))^k$. Estabeleçamos

$$R = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} = \sum_{k \geq 0} R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^k.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A - B)R &= (\lambda I - A - B)R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= (\lambda I - A)R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} - BR(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= (I - BR(\lambda, A))^{-1} - BR(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= (I - BR(\lambda, A))(I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

E, fazendo algumas contas,

$$\begin{aligned}
(I - BR(\lambda, A))^{-1}(I - BR(\lambda, A)) &= I \Leftrightarrow \\
(I - BR(\lambda, A))^{-1} - (I - BR(\lambda, A))^{-1}BR(\lambda, A) &= I \Leftrightarrow \\
(I - BR(\lambda, A))^{-1}(\lambda I - A) - (I - BR(\lambda, A))^{-1}BR(\lambda, A)(\lambda I - A) &= (\lambda I - A) \Leftrightarrow \\
(I - BR(\lambda, A))^{-1}(\lambda I - A - B) &= (\lambda I - A) \Leftrightarrow \\
R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}(\lambda I - A - B) &= I
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R(\lambda I - A - B) = I$$

Mostramos assim que $(\lambda I - A - B)$ é inversível para $\lambda > \omega + |B|$ e como $A + B$ é um operador fechado (soma de um fechado com um limitado definido em todo espaço), isso basta para concluirmos que $\lambda \in \rho(A+B)$ para $\lambda > \omega + |B|$ e $R(\lambda, A+B) = R$. Além disso,

$$\begin{aligned}
|(\lambda I - A - B)^{-1}| &= |R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}| \\
&\leq (\lambda - \omega)^{-1}(1 - |B|(\lambda - \omega)^{-1})^{-1} \\
&= (\lambda - \omega - |B|)^{-1}
\end{aligned}$$

Observemos também que $A + B$ é densamente definido afinal, $D(A + B) = D(A)$. Então, pelo Lema 3 da aula 14, $A+B$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $S(t)$, satisfazendo $|S(t)| \leq e^{(\omega + |B|)t}$. Retornando à norma original de X, temos $\| S(t) \| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$. Isso porque,

$$\| S(t)x \| \leq |S(t)x| \leq e^{(\omega + |B|)t}|x| \leq Me^{(\omega + |B|)t} \| x \| .$$

Agora,

$$|B| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|Bx|}{|x|} \right\} \leq \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{M \| Bx \|}{\| x \|} \right\} = M \| B \|$$

donde, reunindo tais considerações, $\| S(t)x \| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.

■

Uma questão que surge neste ponto é qual a relação entre o semigrupo $T(t)$ gerado por A e o semigrupo $S(t)$ gerado por $A+B$. Consideremos o operador $H(s) = T(t-s)S(s)$. De acordo com o que estudamos na aula 13, para $x \in D(A) = D(A+B)$, $s \mapsto H(s)x$ é diferenciável e $H'(s)x = -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)(A+B)S(s)x = T(t-s)BS(s)x$. Integrando $H'(s)x$ de 0 até t, encontramos

$$\int_0^t T(t-s)BS(s)xds = H(t)x - H(0)x, \text{ para } x \in D(A).$$

Ou ainda,

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)xds, \text{ para } x \in D(A). \tag{9}$$

Como $\overline{D(A)} = X$ e os operadores em ambos os lados da igualdade (9) são limitados, tal expressão vale para todo $x \in X$. Portanto, o semigrupo $S(t)$ é solução da equação integral (9). Para tais equações integrais, temos o resultado na Proposição 2.1, cuja demonstração utiliza a seguinte conhecida desigualdade:

Lema 2.2. *(Desigualdade de Gronwall) Se* a, b *são constantes não negativas e,*

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s)ds$$

para todo $0 \leq t \leq T$*, então* $u(t) \leq ae^{bt}$*, para* $0 \leq t \leq T$.

Demonstração: Ver Teorema 7.1.1 em Henry (1981).

Proposição 2.1. *Sejam* $T(t)$ *um semigrupo fortemente contínuo satisfazendo* $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$ *e* B *um operador limitado em* X*. Então, existe uma única família* $V(t)$, $t \geq 0$ *de operadores limitados em* X *tais que* $t \mapsto V(t)x$ *é contínua em* $[0, \infty[$ *para cada* $x \in X$ *e,*

$$V(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BV(s)xds, \text{ para } x \in X. \tag{10}$$

Demonstração:

Seja

$$V_0(t) = T(t) \tag{11}$$

e, definamos $V_n(t)$ indutivamente por,

$$V_{n+1}(t)x = \int_0^t T(t-s)BV_n(s)xds, \text{ para } x \in X, \ n \geq 0. \tag{12}$$

Afirmamos que

(i) $t \mapsto V_n(t)x$ é contínuo para $x \in X$, $t \geq 0$ e $n \geq 0$ e,

(ii) $\| V_n(t) \| \leq Me^{\omega t} \dfrac{M^n \| B \|^n t^n}{n!}$.

Com efeito, para o item (i), vamos proceder por indução em n. Fixemos $x \in X$. Se $n = 0$, $V_0(t)x = T(t)x$ e $t \mapsto T(t)x$ é contínua afinal, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Agora, suponhamos que $t \mapsto V_n(t)x$ é contínua e demonstremos para $t \mapsto V_{n+1}(t)x$:

$$\begin{aligned}
\| V_{n+1}(t+h)x - V_n(t)x \| &\leq \| \int_0^{t+h} T(t+h-s)BV_n(s)xds - \int_0^t T(t-s)BV_n(s)xds \| \\
&\leq \int_0^t \| (T(t+h-s) - T(t-s))BV_n(s)x \| \; ds \\
&+ \int_t^{t+h} \| T(t+h-s)BV_n(s)x \| \; ds \\
&\leq \int_0^t \| T(t-s)(T(h)-I)BV_n(s)x \| \; ds \\
&+ \int_t^{t+h} \| T(t+h-s) \| \| B \| \| V_n(s)x \| \; ds \\
&\leq \int_0^t \| T(t-s) \| \| (T(h)-I)BV_n(s)x \| \; ds \\
&+ \int_t^{t+h} \| T(t+h-s) \| \| B \| \; Cds \\
&\leq tMe^{\omega(t-s)} \| (T(h)-I)BV_n(s)x \| \\
&+ hMe^{\omega(t+h-s)} \| B \| \; C \to 0 \text{ quando } h \to 0.
\end{aligned}$$

onde usamos que $T(h)x \to x$, $h \to 0$ e que se $t \mapsto V_n(t)x$ é contínua, então é localmente limitada por uma constante C.

Com relação ao item (ii), por indução em n, se $n = 0$, $V_0(t) = T(t)$ e $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$ por hipótese. Suponhamos que tal limitação é válida para n e provemos para $n+1$,

$$\begin{aligned}
\| V_{n+1}(t)x \| &\leq \int_0^t \| T(t-s) \| \| B \| \| V_n(s)x \| \; ds \\
&\leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \| B \| Me^{\omega s} \frac{M^n \| B \|^n s^n}{n!} \| x \| \; ds \\
&\leq Me^{\omega t} \frac{M^{n+1} \| B \|^{n+1}}{n!} \int_0^t s^n ds \| x \| \\
&\leq Me^{\omega t} \frac{M^{n+1} \| B \|^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \| x \| .
\end{aligned}$$

Agora, notemos que a estimativa (ii) nos mostra que para t em intervalos limtados, $t \leq T$ para certo $T \in (0, \infty)$,

$$\| V_n(t) \| \leq Me^{\omega T} \frac{M^n \| B \|^n T^n}{n!} = M_n.$$

E a série das constantes M_n, $\sum_{n \geq 0} Me^{\omega T} \dfrac{M^n \| B \|^n T^n}{n!}$, é convergente (de fato, é a séria da exponencial!) donde, pelo Teste M de Weierstrass,

$$V(t) = \sum_{n \geq 0} V_n(t) \tag{13}$$

é absolutamente convergente para t em intervalos limitados e, também, uniformemente convergente. Além disso, (13) converge uniformemente na norma de operador, pois, para t em intervalos limitados,

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|\leq 1} \| \sum_{n=0}^{m} V_n(t)x - \sum_{n\geq 0} V_n(t)x \| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \| \sum_{n=m+1}^{\infty} V_n(t)x \| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \| V_n(t) \| \| x \| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \| V_n(t) \| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n \to 0 \text{ quando } m \to \infty.\end{aligned}$$

A partir dessas considerações, temos que $t \mapsto V(t)x$ é contínua para cada $x \in X$ e

$$\sum_{n=0}^{m} V_{n+1}(t) = \int_0^t T(t-s)B \sum_{n=0}^{m} V_n(s)xds$$

donde, passando ao limite, vemos que $V(t)$ verifica a equação (10), finalizando a prova da existência. Resta demonstrar a unicidade. Seja $U(t), t \geq 0$ uma família de operadores limitados tais que $t \mapsto U(t)x$ é contínua para cada $x \in X$ e

$$U(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BU(s)xds, \text{ para } x \in X. \tag{14}$$

Subtraindo (10) de (14) e estimando,

$$\| (V(t) - U(t))x \| \leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \| B \| \| (V(s) - U(s))x \| \; ds$$

E, a Desigualdade de Gronwall nos permite concluir que $\| (V(t) - U(t))x \| = 0$ para todo $t \geq 0$ e, portanto, $V(t)x = U(t)x$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$.

■

Da demonstração da Proposição 2.1 e do fato do semigrupo $S(t)$ gerado por $A + B$ satisfazer a equação integral (9), obtemos a seguinte representação explícita de $S(t)$ em termos de $T(t)$:

$$S(t) = \sum_{n\geq 0} S_n(t) \tag{15}$$

sendo $S_0(t) = T(t)$ e,

$$S_{n+1}(t)x = \int_0^t T(t-s)BS_n(s)xds, \text{ para } x \in X. \tag{16}$$

e a convergência em (15) é na topolgia da norma de operador.

Para a diferença entre $T(t)$ e $S(t)$, temos

Corolário 2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ satisfazendo $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$. Sejam B um operador limitado e $S(t)$ o semigrupo fortemente contínuo gerado por $A+B$. Então,*

$$\| S(t) - T(t) \| \leq Me^{\omega t}(e^{M\|B\|t} - 1) \tag{17}$$

Demonstração:

Da equação integral (9) e das estimativas para $S(t)$ no Teorema 2.1,

$$\begin{aligned}
\| S(t)x - T(t)x \| &\leq \int_0^t \| T(t-s) \| \| B \| \| S(s) \| \| x \| \; ds \\
&\leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \| B \| Me^{(\omega + M\|B\|)s} \| x \| \; ds \\
&\leq M^2 e^{\omega t} \| B \| \int_0^t e^{M\|B\|s} \| x \| \; ds \\
&\leq Me^{\omega t}(e^{M\|B\|t} - 1) \| x \|
\end{aligned}$$

■

O principal resultado dessa seção, o Teorema 2.1, nos diz que a adição de um operador linear limitado B a um gerador infinitesimal A de um semigrupo fortemente contínuo não altera essa característica. É natural então nos perguntarmos quais propriedades do semigrupo $T(t)$ gerado por A são preservadas quando A é perturbado por um operador limitado B. A seguir, vemos que se A é gerador infinitesimal de um semigrupo compacto, $A+B$ também o é.

Vale recordar a definição de semigrupo compacto e uma caracterização bastante útil deste tipo de semigrupo:

Definição 2.1. Um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ é dito *compacto para* $t > t_0$ se, para todo $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. $T(t)$ é dito *compacto* se é compacto para $t > 0$.

Teorema 2.2. *Sejam $T(t)$ um semigrupo fortemente contínuo e A seu gerador infinitesimal. $T(t)$ é um semigrupo compacto se, e somente se, $T(t)$ é contínuo na topolgia da norma de operador para $t > 0$ e $R(\lambda, A)$ é compacto para $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração: Ver Teorema 2.3.3 em Pazy (1983).

Proposição 2.2. *Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo compacto fortemente contínuo $T(t)$ e B um operador limitado. Então, $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo compacto fortemente contínuo $S(t)$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 2.2, $T(t)$ é contínuo na topologia da norma de operador para $t>0$ e $R(\lambda, A)$ é compacto para $\lambda \in \rho(A)$. Conforme estudamos na demonstração do Teorema 2.1,

$$R(\lambda, A+B) = \sum_{k\geq 0} R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^k.$$

e, para $\lambda > \omega + M \parallel B \parallel +1$, tal série converge em $B(X)$. Como cada um dos seus termos é compacto, $R(\lambda, A+B)$ também o é para $\lambda > \omega + M \parallel B \parallel +1$, como limite uniforme de operadores compactos. Da igualdade do resolvente (Identidade de Hilbert),

$$R(\lambda, A+B) - R(\mu, A+B) = (\mu-\lambda)R(\lambda, A+B)R(\mu, A+B),\ \ \lambda, \mu \in \rho(A+B),$$

vem que se $R(\lambda, A+B)$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A+B)$, então $R(\mu, A+B)$ é compacto para todo $\mu \in \rho(A+B)$.

Agora, para concluirmos que $S(t)$ é compacto, pelo Teorema 2.2, resta provarmos que $S(t)$ é contínuo na topologia da norma de operador. Como cada $S_n(t)$, definido por (16), é dado em função de $T(t)$, o qual é contínuo na topolgia da norma de operador, então $S_n(t)$ também o é. E, $S(t)$, sendo o limite uniforme, em conjuntos de t limitados, na topologia da norma de operador de $\sum_{j=0}^{n} S_j(t)$, segue que $S(t)$ é contínuo na topologia da norma de operador para $t>0$.

$\blacksquare$

Nem todas as propriedades do semigrupo $T(t)$ são preservadas por uma perturbação limitada do seu gerador infinitesimal. É conhecido, por exemplo, que se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$, o qual é contínuo na topolgia da norma de operador para $t \geq t_0 > 0$, ou diferenciável para $t \geq t_0 > 0$ ou compacto para $t \geq t_0 > 0$, então $S(t)$, o semigrupo gerado por $A+B$ - onde B é um operador limitado, não necessariamente possui a correspondente propriedade.

3 Perturbações dos geradores infinitesimais de semigrupos de contrações

Sejam $(X, \| \cdot \|)$ um espaço de Banach e $(X^*, \| \cdot \|_{X^*})$ seu dual,

$$X^* = \{\zeta : X \to \mathbb{K} \text{ lineares e contínuos}\}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\text{ou}\,\mathbb{C}$ e $\| \zeta \|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} \mathrm{Re}\,\zeta(x)$

Definição 3.1. A aplicação dual $J : X \to \mathbb{P}(X^*)$ é definida por $J(x) = \{\zeta \in X^* : \mathrm{Re}\,\zeta(x) = \| x \|^2, \| \zeta \|_{X^*} = \| x \|\}$

Observação 3.1. É importante observar que $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Com efeito, sejam $x \in X$ e $Y = [x]$, o subespaço gerado por x, e consideremos $\zeta : Y \to \mathbb{K}$, $\zeta(\lambda x) = \lambda \| x \|^2$. Então, ζ é linear e Re $\zeta(x) = \| x \|^2$. Se $y \in Y, y = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$ e, por um lado,

$$\mathrm{Re}\zeta(\lambda x) \leq \| \lambda x \| \| x \| \Rightarrow \| \zeta \|_{X^*} \leq \| x \|$$

Agora, por outro,

$$\zeta\left(\frac{x}{\| x \|}\right) = \frac{1}{\| x \|} \| x \|^2 = \| x \| \Rightarrow \| \zeta \|_{X^*} \geq \| x \| .$$

E, o teorema de Hahn - Banach nos permite estender tal funcional para todo espaço X, preservando sua norma.

Definição 3.2. Um operador linear A é *dissipativo* se $\forall x \in D(A)$, existe $\zeta \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\zeta(Ax) \leq 0$.

Notemos que se A é dissipativo, então tA também o é para todo $t > 0$, afinal, da Definição 3.2, temos que para todo $x \in D(A)$, existe $\zeta \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\,\zeta(Ax) \leq 0$ donde, se $t > 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta(tAx) = t\,\mathrm{Re}\zeta(Ax) \leq 0$.

O próximo lema nos dá uma caracterização extremamente útil dos operadores dissipativos:

Lema 3.1. *A é um operador linear dissipativo se, e somente se,*

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|, \forall x \in D(A) \text{ e } \lambda > 0. \tag{18}$$

Demonstração:

Consideremos A um operador dissipativo. Sejam $x \in D(A)$, $\zeta \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\,\zeta(Ax) \leq 0$. Então, para $\lambda > 0$,

$$\| \zeta \|_{X^*} \| (\lambda - A)x \| \geq |\zeta((\lambda - A)x)| \geq \mathrm{Re}\,\zeta((\lambda - A)x) = \mathrm{Re}\,\lambda\zeta(x) - \mathrm{Re}\,\zeta(Ax) \geq \lambda \| x \|^2 .$$

donde é válida a desigualdade (18).

Reciprocamente, seja $x \in D(A)$ e suponha que $\lambda \| x \| \leq \| \lambda x - Ax \|$ para todo $\lambda > 0$. Se $\bar{\zeta}_\lambda \in J(\lambda x - Ax)$ e $\zeta_\lambda = \bar{\zeta}_\lambda / \| \bar{\zeta}_\lambda \|_{X^*}$, então $\| \zeta_\lambda \|_{X^*} = 1$ e,

$$\begin{aligned} \lambda \| x \| &\leq \| \lambda x - Ax \| \\ &= \mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(\lambda x - Ax) \\ &= \lambda \mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(x) - \mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(Ax) \\ &\leq \lambda \| x \| - \mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(Ax) \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Segue que,

$$\mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(Ax) \leq 0 \text{ e } \mathrm{Re}\,\zeta_\lambda(x) \geq \| x \| - \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \tag{19}$$

Agora, como a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraca - estrela, a sequência $\{\zeta_\lambda\}_{\lambda > 0}$ tem um ponto de acumulação ζ na topologia fraca - estrela, $\| \zeta \|_{X^*} \leq 1$. Disso e de (19), vem que $\mathrm{Re}\,\zeta(Ax) \leq 0$ e $\mathrm{Re}\,\zeta(x) \geq \| x \|$. Mas, $\mathrm{Re}\zeta(x) \leq \| x \|$ e, portanto, $\mathrm{Re}\,\zeta(x) = \| x \|$. Tomando $\zeta' = \| x \| \zeta$, resulta que $\zeta' \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\,\zeta'(Ax) \leq 0$. Pela arbitrariedade de $x \in D(A)$, concluimos que A é dissipativo.

$\blacksquare$

Outras propriedades dos operadores dissipativos estão listadas abaixo :

Teorema 3.1. *Seja A um operador dissipativo em X.*

(a) Se para algum $\lambda_0 > 0, R(\lambda_0 I - A) = X$, então $R(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$.

(b) Se A é fechável, então $\bar{A}$, o fecho de A, é dissipativo também.

(c) Se $\overline{D(A)} = X$, então A é fechável.

Demonstração:

Para o item (a), consideremos o conjunto :

$$\Lambda = \{\lambda \in (0, \infty) \, : \, R(\lambda I - A) = X\}$$

Então, $\Lambda \neq 0$ afinal, $\lambda_0 \in \Lambda$ por hipótese. Mostraremos que se trata de um conjunto aberto e fechado e, portanto, $\Lambda = (0, \infty)$.

A priori, devemos notar que A é um operador fechado. Isso porque, a desigualdade (18) com $\lambda = \lambda_0$ e o fato de que $R(\lambda_0 I - A) = X$ implicam que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado definido em todo espaço X, sendo fechado. Daí, $(\lambda_0 I - A)$ é um operador fechado e, consequentemente, A também o é.

Seja $\lambda \in \Lambda$. Da expressão em (18), $\lambda \in \rho(A)$. Como sabemos, $\rho(A)$ é um conjunto aberto, e, portanto, uma vizinhança de λ está em $\rho(A)$. A intersecção dessa vizinhaça com a reta real está em Λ, o que implica que tal conjunto é aberto.

Agora, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$ $(\lambda > 0)$. De $R(\lambda_n I - A) = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $y \in X$, existe $x_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \tag{20}$$

De (18), temos que $\| \, x_n \, \| \leq \lambda_n^{-1} \, \| \, y \, \| \leq C$ para alguma constante C, lembrando que $\lambda_n > 0$ e é uma sequência convergente. Aplicando isso, (20) e (18),

$$\begin{aligned}
\lambda_m \, \| \, x_n - x_m \, \| &\leq \| \, (\lambda_m)(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \, \| \\
&= \| \, \lambda_n x_n - A x_n - \lambda_m x_m + A x_m - \lambda_n x_n + \lambda_m x_n \, \| \\
&= \| \, y - y - (\lambda_n - \lambda_m) x_n \, \| \\
&\leq |\lambda_n - \lambda_m| \, \| \, x_n \, \| \\
&\leq C \, |\lambda_n - \lambda_m|
\end{aligned}$$

e, segue que, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Seja $x = \lim x_n$. Por (20), $A x_n \to \lambda x - y$. Sendo A um operador fechado, $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = y$. Logo, $R(\lambda I - A) = X$ e $\lambda \in \Lambda$. Concluimos que Λ é fechado em $(0, \infty)$ e também aberto donde, $\Lambda = (0, \infty)$.

Com relação ao item (b), seja $x \in D(\bar{A})$, $y = \bar{A}x$. Então, existe uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $A x_n \to y = \bar{A} x$. Pelo Lema 3.1, $\| \, \lambda x_n - A x_n \, \| \geq \lambda \, \| \, x_n \, \|$ para $\lambda > 0$. Fazendo $n \to \infty$, encontramos $\| \, \lambda x - \bar{A} x \, \| \geq \lambda \, \| \, x \, \|$ para $\lambda > 0$, o que significa, pela arbitrariedade de $x \in D(\bar{A})$, que $\bar{A}$ é dissipativo, usando novamente o Lema 3.1.

Por fim, para provar o item (c), vamos supor que A não é fechável. Então, existe uma sequência $\{x_n\}$ tal que $x_n \in D(A)$, $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$ com $\| y \| = 1$. Aplicando (18), para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$,

$$\| (x + t^{-1}x_n) - tA(x + t^{-1}x_n) \| \geq \| x + t^{-1}x_n \|$$

Fazendo $n \to \infty$ e, em seguida, $t \to 0$, temos $\| x - y \| \geq \| x \|$ para cada $x \in D(A)$ e $D(A)$ não pode ser denso em X. Logo, A é fechavél.

■

Teorema 3.2 (Lumer - Phillips). *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido.*

(a) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X, então A é dissipativo. De fato, $Re\zeta(Ax) \leq 0, \forall \zeta \in J(x)$ e $R(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$.

(b) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X.

Demonstração: Ver Teorema 1 da aula 15.

Definição 3.3. Um operador dissipativo A para o qual $R(I - A) = X$ é denominado *m - dissipativo.*

Com base nessa definição e nas propriedades para operadores dissipativos, podemos reformular o Teorema de Lumer - Philips do seguinte modo: um operador densamente definido A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações se, e somente se, é m-dissipativo.

Neste ponto, estamos prontos para demonstrar o resultado central dessa seção:

Teorema 3.3. *Sejam A e B operadores lineares em X tais que $D(B) \supset D(A)$ e $A + tB$ é dissipativo para $0 \leq t \leq 1$. Se*

$$\| Bx \| \leq \alpha \| Ax \| + \beta \| x \|, \text{ para } x \in D(A) \tag{21}$$

onde $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$ e para algum $t_0 \in [0, 1]$, $A + t_0 B$ é m-dissipativo, então $A + tB$ é m-dissipativo para todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração:

Mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que se $A + t_0B$ é m - dissipativo, então, $A + tB$ é m - dissipativo para todo t com $|t - t_0| < \delta$. Como todo ponto do intervalo $[0, 1]$ pode ser alcançado por qualquer outro através de um número finito de passos de tamanho δ ou menos, segue o resultado.

Por hipótese, $A+t_0B$ é m - dissipativo para algum $t_0 \in [0, 1]$. Daí, por (18) aplicado à $A + t_0B$ com $\lambda = 1$ e pelo fato de que $R(I - (A + t_0B)) = X$, temos que o operador $(I - (A + t_0B))$ é inversível com inversa $R(t_0) : X \to D(A)$ limitada em todo X, $\| R(t_0) \| \leq 1$.

Vejamos a seguir que o operador $BR(t_0)$ é limitado. Usando (21) e o a desigualdade triangular, para $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
\| Bx \| &\leq \alpha \| Ax \| + \beta \| x \| \\
&\leq \alpha \| Ax + t_0Bx - t_0Bx \| + \beta \| x \| \\
&\leq \alpha \| (A + t_0B)x \| + \alpha t_0 \| Bx \| + \beta \| x \| \\
&\leq \alpha \| (A + t_0B)x \| + \alpha \| Bx \| + \beta \| x \|
\end{aligned}$$

uma vez que $0 <= t_0 <= 1$. Consequentemente,

$$(1 - \alpha) \| Bx \| \leq \alpha \| (A + t_0B)x \| + \beta \| x \|$$

E,

$$\| Bx \| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| (A + t_0B)x \| + \frac{\beta}{1-\alpha} \| x \|$$

Como $R(t_0)x \in D(A)$, $\forall x \in X$, $(I - (A + t_0B))R(t_0) = I$ e $\| R(t_0)x \| \leq \| x \|$, temos que

$$\begin{aligned}
\| BR(t_0)x \| &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| (A + t_0B)R(t_0)x \| + \frac{\beta}{1-\alpha} \| R(t_0)x \| \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| (R(t_0) - I)x \| + \frac{\beta}{1-\alpha} \| R(t_0)x \| \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} (\| R(t_0)x \| + \| x \|) + \frac{\beta}{1-\alpha} \| R(t_0)x \| \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} (\| x \| + \| x \|) + \frac{\beta}{1-\alpha} \| x \| \\
&\leq \frac{2\alpha + \beta}{1-\alpha} \| x \|
\end{aligned}$$

donde $BR(t_0)$ é um operador limitado. Observemos que

$$\begin{aligned} I-(A+tB) &= I-(A+t_0B)+(t_0-t)B \\ &= I-(A+t_0B)+(t_0-t)BR(t_0)(I-(A+t_0B)) \\ &= (I+(t_0-t)BR(t_0))(I-(A+t_0B)) \end{aligned}$$

Daí, $I-(A+tB)$ é inversível se, e somente se, $I+(t_0-t)BR(t_0)$ é inversível. Agora, pelo Teorema 1 da aula 2, desde que $\| (t_0-t)BR(t_0) \| < 1$, $I+(t_0-t)BR(t_0)$ é inversível com inversa limitada em todo X e,

$$\| (t_0-t)BR(t_0) \| < 1 \Leftrightarrow |t_0-t|\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow |t_0-t| < \frac{1-\alpha}{2\alpha+\beta}.$$

Vemos que basta tomar $\delta = \frac{1-\alpha}{4\alpha+2\beta}$, concluindo a demonstração.

■

Corolário 3.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Seja B um operador dissipativo com $D(B) \supset D(A)$ satisfazendo,*

$$\| Bx \| \leq \alpha \| Ax \| + \beta \| x \|, \text{ para } x \in D(A) \tag{22}$$

onde $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$. Então, $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Demonstração:

A ideia é aplicar o Teorema 3.2 para provar que $A+B$ é gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Primeiramente, notemos que, como $D(A+B) = D(A)$, o qual é denso em X, $A+B$ é densamente definido.

Pelo referido Teorema, sendo A gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, A é m - dissipativo e $\text{Re}\zeta(Ax) <= 0$, $\forall \zeta \in J(x)$. Como B é dissipativo e $D(B) \supset D(A)$, para $x \in D(A)$, existe $\zeta \in J(x)$ tal que $\text{Re}\zeta(Bx) \leq 0$ e para esse mesmo ζ, $\text{Re}\zeta(Ax) \leq 0$. Conforme observamos anteriormente, $\text{Re}\zeta(tBx) \leq 0$, para todo $t > 0$. Segue que, $\text{Re}\zeta((A+tB)x) \leq 0$. Isso mostra que $A+tB$ é dissipativo para $0 \leq t \leq 1$.

Além disso, como $A+t_0B$ é m - dissipativo para $t_0 = 0$, do Teorema 3.3, temos $A+tB$ m - dissipativo para todo $t \in [0,1]$. Em particular, $A+B$ é m - dissipativo. Concluimos, então, do Teorema 3.2, que $A+B$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações como queríamos.

$\blacksquare$

Vale observar que o Corolário 3.1 pode ser reformulado de uma forma mais simétrica:

Corolário 3.2. *Seja A um operador linear densamente definido. Seja B um operador linear tal que $D(B) \supset D(A)$ e (22) vale. Suponha que $A+tB$ é dissipativo para $0 \leq t \leq 1$. Então, A é m - dissipativo se, e somente se, $A+B$ é m - dissipativo.*

O Teorema 3.3 e o Corolário 3.1 não valem em geral no caso em que $\alpha < 1$ em (21) é substituído por $\alpha = 1$. Uma das razões é que não é mais verdade que $A+B$ é necessariamente fechado. Se $A+B$ não é fechado, não pode ser o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações (basta usar que um operador A densamente definido é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações se, e só se, é m - dissipativo, e isso implica que $1 \in \rho(A)$, em particular, A é fechado). Um contra - exemplo é o seguinte: consideremos iA um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert. Pelo Teorema 1.10.8 em Pazy (1983), ambos A e $B = -A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos de contrações. Temos a estimativa (21) com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, mas $A+B$ não é fechado restrito a $D(A)$. Agora, o fecho de $A+B$, isto é, o operador nulo definido em todo espaço, é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Teorema 3.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Seja B um operador linear dissipativo tal que $D(B) \supset D(A)$ e*

$$\| Bx \| \leq \| Ax \| + \beta \| x \|, \text{ para } x \in D(A) \tag{23}$$

onde $\beta \geq 0$ é uma constante. Se B^*, o adjunto de B, é densamente definido, então o fecho $\overline{A+B}$ de $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Demonstração:

Como A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, do Teorema 3.2, sabemos que A é m - dissipativo. E, sendo B dissipativo com $D(B) \supset D(A)$, por um raciocínio análogo ao da demonstração do Corolário 3.1, temos que $A+B$ é dissipativo e densamente definido. Pelo Teorema 3.1, itens (b) e (c), $A+B$ é fechável e seu fecho, $\overline{A+B}$, é dissipativo.

Novamente, então, pelo Teorema 3.2, para provar que $\overline{A+B}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, basta demonstrar que $R(I - (\overline{A+B})) = X$. Da desigualdade (18) aplicada à $\overline{A+B}$, temos que $(\lambda I - (\overline{A+B}))$ é inversível com inversa limitada em $R(\lambda I - (\overline{A+B}))$, $\forall \lambda > 0$. E, como, $\overline{A+B}$ é fechado, $(\lambda I - (\overline{A+B}))$ e seu inverso também o são, donde, pelo Teorema do Gráfico Fechado aplicado à $(\lambda I - (\overline{A+B}))^{-1}$, resulta que $D((\lambda I - (\overline{A+B}))^{-1}) = R(\lambda I - (\overline{A+B}))$ é fechado. Logo, é suficiente ver que $R(I - (\overline{A+B}))$ é denso em X.

Seja $\zeta' \in X^*$ tal que $\zeta'(z) = 0, \forall z \in R(I - (\overline{A+B}))$. Seja $y \in X$ com $\| \zeta' \|_{X^*} \leq \zeta(y)$. Se multiplicarmos ambos os lados da desigualdade (23) por $0 \leq t < 1$, temos para $x \in D(A)$,

$$\| tBx \| \leq t \| Ax \| + \beta \| x \|$$

o que nos permite aplicar o Corolário 3.1 com B substituído por tB e concluir que $A+tB$ é m - dissipativo com $0 \leq t < 1$. Disso segue que a equação

$$x_t - Ax_t - tBx_t = y \tag{24}$$

possui uma única solução x_t para cada $0 \leq t < 1$. Além do mais, de (18), temos $\| y \| \geq \| x_t \|$. Aplicando (23), (24) e a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \| Bx_t \| &\leq \| Ax_t \| + \beta \| x_t \| \\ &\leq \| Ax_t + tBx_t - tBx_t \| + \beta \| x_t \| \\ &\leq \| (A+tB)x_t \| + t \| Bx_t \| + \beta \| x_t \| \\ &\leq \| y - x_t \| + t \| Bx_t \| + \beta \| x_t \| \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (1-t) \| Bx_t \| &\leq \| y - x_t \| + \beta \| x_t \| \\ &\leq \| y \| + \| x_t \| + \beta \| x_t \| \\ &\leq \| y \| + \| y \| + \beta \| y \| \\ &= (2+\beta) \| y \| \end{aligned} \tag{25}$$

Seja $\zeta \in D(B^*)$, então

$$\begin{aligned} |\zeta((1-t)Bx_t)| &= (1-t)|B^*\zeta(x_t)| \\ &\leq (1-t) \| B^*\zeta \| \| x_t \| \\ &\leq (1-t) \| B^*\zeta \| \| y \| \to 0 \text{ quando } t \to 1 \end{aligned} \tag{26}$$

Como $D(B^*)$ é denso em X e por (25), $(1-t)Bx_t$ é uniformemente limitado, segue de (26) que $(1-t)Bx_t$ converge fracamente a 0 quando t tende a 1. Em particular, para a escolha de $\zeta^{'}$,

$$\begin{aligned} \| \zeta^{'} \|_{X^*} &\leq \zeta^{'}(y) \\ &= \zeta^{'}(x_t - Ax_t - tBx_t) \\ &= \zeta^{'}(x_t - Ax_t - Bx_t + Bx_t - tBx_t) \\ &= \zeta^{'}((1-t)Bx_t) \to 0 \text{ quando } t \to 1 \end{aligned}$$

uma vez que $x_t - Ax_t - Bx_t \in R(I - (\overline{A+B}))$. Logo, $\zeta^{'} = 0$ e, isso significa que $R(I - (\overline{A+B}))$ é denso em X como queríamos.

$\blacksquare$

Se X é um espaço de Banach reflexivo e B é um operador linear fechável densamente definido em X, é conhecido que B^* é fechado e $D(B^*)$ é denso em X^*, simplificando assim o enunciado do Teorema 3.4 para espaços de Banach reflexivos:

Corolário 3.3. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Seja B um operador linear dissipativo tal que $D(B) \supset D(A)$ e*

$$\| Bx \| \leq \| Ax \| + \beta \| x \|, \text{ para } x \in D(A) \tag{27}$$

onde $\beta \geq 0$ é uma constante. Então, o fecho $\overline{A+B}$ de $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Referências

[1] Henry, D. B. Evolution equation in Banach spaces. Recuperado de http://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm.

[2] Henry, D. B. (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840). Springer-Verlag.

[3] Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 44). New York, NY: Springer-Verlag.