Exemplos com Laplaciano

Allan F. Banzatto
Rayner M.Ribeiro

INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

07 de Julho de 2020

1

Notação Multi-índice

$$\alpha \in \mathbb{N}^m, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1}. \cdots .x_m^{\alpha_m}$$

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}. \cdots .\partial_m^{\alpha_m}$$

Definição

Uma aplicação $T(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathcal{B}(X)$ é um operador de semigrupo fortemente contínuo, ou tão somente C_0-semigrupo se satisfaz as seguintes condições:

- **A** $T(0) = I$ e $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todos $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- **B** Para cada $x \in X$ a órbita $T(.) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathcal{B}(X), t \mapsto T(t)x$, é contínua.

O gerador A de $T(\cdot)$ é dado por:

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \text{o limite } \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x \right) \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x \right), \text{ para } x \in D(A).$$

Definição

Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Um semigrupo ω-contração é um semigrupo $T(\cdot)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Tal semigrupo é chamado de quasi-contrativo. Se $\omega = 0$, chamamos $T(\cdot)$ semigrupo de contração.

Definição

O conjunto de dualidade $J(x)$ de um vetor $x \in X$ é definido por:

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* | \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x\| = \|x^*\| \right\},$$

onde $\langle x, x^* \rangle = x^*(x) \forall x \in X \ e \ x^* \in X^*$. Pelo Teorema de Hanh-Banach $J(x) \neq \emptyset$.

Definição

Um operador A é dito fechável se possui uma extensão fechada B.

Definição

Para um operador densamente definido A, definimos seu adjunto por

$$A^*x^* = y^*, \forall x^* \in D(A^*),$$

onde

$$D(A^*) = \{x^* \in X^* / \; \exists y^* \in X^* \forall x \in D(A) : \langle Ax, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle\}. \quad (1.19)$$

O que significa $\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^*x^* \rangle, \forall x \in D(A)$ e $x^* \in D(A^*)$.

Definição

Para um operador linear em um espaço de Hilbert X com domínio denso, definimos o espaço adjunto de Hilbert A' de A como em (1.19), trocando o operador dualidade $\langle x, x^* \rangle$ pelo produto interno (x, y). Um operador linear A de X é chamado de simétrico se

$$\forall x, y \in D(A) : (Ax, y) = (x, Ay),$$

que significa que $A \subseteq A'$ se $D(A)$ é denso. Se A é densamente definido, dizemos que é autoadjunto se $A = A'$, i.e., A é simétrico e

$$\begin{aligned} D(A) = & \quad \{ \quad y \in X / \exists z \in X \ \forall x \in D(A) : (Ax, y) = (x, z) \} \\ = & \quad \{ \quad y \in X / (D(A), \ \| \cdot \|) \to \mathbb{C}; \ x \mapsto (Ax, y) \text{ é contínuo} \} \end{aligned}$$

Definição

Um operador A é chamado de dissipativo se para cada vetor $x \in D(A)$ existe um funcional $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle \mathrm{Ax}, \mathrm{x}^* \rangle \leq 0$. Chamamos A de operador acretivo se $-A$ é dissipativo.

Definição

Seja $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, $k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \cdots, m\}$ e $p \in [0, \infty)$. Uma função $u \in L^p(G)$, possui uma derivada fraca em $L^p(G)$ com respeito a $j-$ésima coordenada se existe um mapa $v \in L^p(G)$ satisfazendo

$$\int_G u\partial_j \varphi dx = -\int_G v\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Definição

O espaço de Sobolev

$$W^{1,p}(G) = \{u \in L^p(G) / \forall j \in \{1, \cdots, m\} \exists \partial_j u \in L^p(G)\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{1,p} = \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \sum_{j=1}^m \|\partial_j u\|_p^p\right)^{1/p} & , p < \infty \\ \max\limits_{j \in \{1,\cdots,m\}} \{\|u\|_\infty, \|\partial_j u\|_\infty\} & , p = \infty. \end{cases}$$

Esta norma é equivalente a norma dada por $\|u\|_p + \sum_{j=1}^m \|\partial_j u\|_p$.
Analogamente definimos os espaços de Sobolev $W^{k,p}(G)$ e as derivadas fracas de ordem superior $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m}$ para $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ e $|\alpha| = \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq k$.

Teorema 1.27

Seja $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Um operador linear A gera um semigrupo C_0 em X satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ se e somente se A é fechado, $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda > \omega$:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Neste caso temos que $\mathbb{C}_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\} \subseteq \rho(A)$ e $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}_\omega$:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n} \qquad (1.15)$$

O operador A gera um semigrupo de ω-contração se e somente se A é fechado, $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$, $\forall \lambda > \omega : \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{(\lambda - \omega)}$
Neste caso (1.15) é verdadeira se e somente se $M = 1$.

Proposição 1.39

Seja A dissipativo. As seguintes afirmações valem:

A. Seja $\lambda > 0$. Então o operador $\lambda I - A$ é injetor e para $y \in R(\lambda I - A) := (\lambda I - A)(D(A))$ temos que $\left\|(\lambda I - A)^{-1} y\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\|$.
B. Seja $\lambda_0 I - A$ sobrejetivo para algum $\lambda_0 > 0$. Então A é fechado, $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$, e $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.
C. Seja $D(A)$ denso em X. Então A é fechável e $\overline{A}$ também é dissipativo.

Teorema 1.40 (Lumer-Phillps)

Seja A um operador linear densamente definido, então seguem as seguintes assertivas:

- **A** Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ possua uma imagem densa. Então $\overline{A}$ gera um semigrupo de contração.
- **B** Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ seja sobrejetivo. Então A gera um semigrupo de contração.
- **C** Seja A um gerador de um semigrupo de contração . Então A é dissipativo, com $\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}$ para $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Corolário 1.41

Seja A dissipativo e densamente definido, e seja $\lambda_0 I - A^*$ injetor para algum $\lambda_0 > 0$. Então $\overline{A}$ gera um semigrupo de contração. Se A^* é dissipativo então $\lambda I - A^*$ é injetivo para $\lambda > 0$.

Observação 1.42

Segue as seguintes observações:

- **A** Para $u \in C^k(G)$, e $\partial^\alpha u \in L^p(G)$ com $|\alpha| \leq k$ Então $u \in W^{k,p}(G)$ e suas derivadas clássicas e fraca coincidem.
- **B** Seja $u, u_n, v \in L^p(G)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ tal que $u_n \to u$ e $\partial^\alpha u_n \to v$ em $L^p(G)$ com $n \to \infty$. Então $\partial^\alpha u = v$. Ou seja $D(\partial^\alpha) = \{u \in L^p(G) |\ \exists \partial^\alpha u \in L^p(G)\}$,$\partial^\alpha$ é fechado em $L^p(G)$.
- **C** Seja $p < \infty$. Então $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ é denso em $W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$ e $C_c^\infty(G) \cap W^{k,p}(G)$ é denso em $W^{k,p}(G)$.
- **D** Seja $u \in W^{1,p}(G)$ e $v \in W^{1,p'}(G)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Temos que o produto uv é um elemento de $W^{1,1}(G)$ e satisfaz a regra do produto $\partial_j(uv) = u\partial_j v + v\partial_j u$. Resultados análogos valem para derivadas de ordem superior.
- **E** Tome G com fronteira compacta ∂G de classe C^1. Temos que o mapa $W^{1,p}(G) \to L^p(\partial G, d\sigma)$ $u \to u|_{\partial G}$ tem extensão contínua $tr : W^{1,p}(G) \to L^p(\partial G, d\sigma)$ chamada de operador traço. Seu núcleo é o fecho $W^{1,p}(G)$ das funções teste $C_0^\infty(G)$ em $W^{1,p}(G)$. Se $tr(u) = 0$, dizemos que u some em ∂G "no sentido do traço".

Fórmula de Green

Seja $f \in W^{1,p}(G)$ e $u \in W^{1,p}(G)$. Temos que:

$$\int_G u \cdot \operatorname{div} \mathrm{f} \, \mathrm{dx} = -\int_{\mathrm{G}} \mathrm{f} \cdot \nabla \mathrm{u} \, \mathrm{dx} + \int_{\partial \mathrm{G}} \mathrm{tr}(\mathrm{u}) \nu \mathrm{tr}(\mathrm{f}) \mathrm{d}\sigma,$$

onde ν é o vetor normal unitário à fronteira e o $\cdot$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^m$.

Teorema 1.24 [ST]

Seja A um operador fechado em X com domínio denso. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$.

b) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ e $R(\lambda, A)^* = R(\lambda, A^*)$ para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Proposição 3.31 [ST]

Seja $1 \leq p < \infty$. Seja ou $f \in W^{2,p}(U)$ ou U com uma fronteira compacta de Lipschitz e $f \in W^{2,p}(U)$. Então há constantes C, ε_0 tais que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|\partial_j f\|_p^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \left(\sum_{i,j=1}^{m} \|\partial_{ij} f\|_p^p\right)^{1/p} + \frac{C}{\varepsilon}\|f\|_p,$$

para todo $\varepsilon > 0$ se $f \in W_0^{2,p}(U)$ e para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ se $f \in W^{2,p}(U)$.

Lema 3.5 [ST]

Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $p \in [1, \infty)$ e $\varepsilon > 0$.

- **A** Seja $f \in D^{\alpha,p}(U)$ e $p < \infty$. Então as funções $G_\varepsilon f \in C^\infty(U)$ convergem para f e $\partial^\alpha(G_\varepsilon f)$ tendem a $\partial^\alpha f$ em $L^p_{loc}(U)$ quando $\varepsilon \to 0$. Ainda mais $\partial^\alpha(G_\varepsilon f)(x) = G_\varepsilon(\partial^\alpha f)(x)$ se $x \in U, \varepsilon < d(x, \partial U)$. Portanto $\varepsilon_j \to 0$, obtemos uma subsequência $\varepsilon_n := \varepsilon_{j_n} \to 0$ tal que $G_{\varepsilon_n} f \to f$ e $\partial^\alpha(G_{\varepsilon_n} f) \to \partial^\alpha f$ quase sempre em U quando $n \to \infty$. Se f também pertence a $D^{\alpha,p}(U)$ para algum $\beta \in \mathbb{N}_0^m$, podemos tomar o mesmo ε_n para todos tais β.
- **B** Seja $f, g \in L^p_{loc}(U)$ e $f_n \in \mathcal{D}^{\alpha,p}(U)$ tal que $f_n \to f$ e $\partial^\alpha f \to g$ em $L^p_{loc}(U)$ quando $n \to \infty$. Então f está contida em $\mathcal{D}^{\alpha,p}(u)$ e $\partial^\alpha f = g$. Se esses limites existem em $L^p(U)$ e para todo α com $|\alpha| \leq k$, então f é um elemento de $W^{k,p}(U)$.

Proposição 4.13 [FA]

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto , $f : U \to \mathbb{F}$ mensurável com $\tilde{f} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$, e $1 \leq p \leq \infty$. As seguintes afirmações valem:

a. O mapa $G_\varepsilon f$ é um elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Se existe um conjunto compacto $K \subseteq U$ com $f(x) = 0$ quase sempre $x \in U \backslash K$, então $G_\varepsilon f \in C^\infty_c(U)$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ com $\varepsilon_0 := \mathrm{dist}(\mathrm{K}, \partial \mathrm{U})$.
b. A restrição de G_ε para $L^p(U)$ pertence a $B(L^p(U))$ com $\|G_\varepsilon\| < 1$. Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(U)$. Então $G_\varepsilon f \to f$ em $L^p(U)$ quando $\varepsilon \to 0$.
c. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então $C^\infty_c(U)$ é denso em $L^p(U)$. Mais precisamente, se $f \in L^p(U) \cap L^q(U)$ para algum $1 \leq p, q \leq \infty$ então existem funções $f_n \in C^\infty_c(U)$ convergindo para f em $L^p(U)$ e em $L^q(U)$.

2

Definição

Define-se o espaço de Schwartz como o espaço das funções com decrescimento rápido, ou seja:

$$\mathcal{S}_m = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) | \forall k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^m : p_{k,\alpha}(f) < \infty\},$$

onde

$$p_{k,\alpha}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x|_2^k |\partial^\alpha f(x)|$$

Definição

Sejam $f, g \in \mathcal{S}_m$, então define-se a convolução de $f * g$, como:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x - y) dy$$

Definição

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, então define-se a transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}_m \to \mathcal{S}_m$ como:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \; \xi \in \mathbb{R}^m$$

Proposição 23

Seja $f, g \in \mathcal{S}_m$, então transformada de Fourier goza das seguintes propriedades:

- **A** $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$
- **B** $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Para a demonstração do item (A) segue da definição que:
$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} dx e^{-i\xi\cdot x} \partial^\alpha f(x)$
Realizando a integral em uma das coordenadas e observando que $|\partial^\alpha f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m)| \to 0$ para $x \to \infty$, segue que:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} d^{m-1}x e^{-i\sum \xi_n x_n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_j e^{-i\xi_j x_j} \partial^{\alpha-\alpha_j} \partial^{\alpha_j} f(x)$$

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} d^{m-1}x e^{-i\sum \xi_n x_n} \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_j i^{\alpha_j} (\xi_j)^{\alpha_j} e^{-i\xi_j x_j} \partial^{\alpha-\alpha_j} f(x)$$

Onde realizamos integração por partes nas coordenada x_j, repetindo esse procedimento para as demais, teremos como resultado:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} dx (i)^{\sum \alpha_j} \prod_{1\leq j\leq m} \xi_j^{\alpha_j} f(x) \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) \\ =& i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Para a demonstração do item (B) basta observar que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\xi) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} dx e^{-i\xi\cdot x} \int_{\mathbb{R}^m} d\eta f(\eta) g(x-\eta) \mathcal{F}(f*g)(\xi) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} d\eta \int_{\mathbb{R}^m} dx e^{-i\xi\cdot x} f(\eta) g(x-\eta) \mathcal{F}(f*g)(\xi) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} d\eta \int_{\mathbb{R}^m} du e^{-i\xi\cdot(\eta+u)} f(\eta) g(u) \mathcal{F}(f*g)(\xi) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} d\eta e^{-i\xi\cdot\eta} f(\eta) \int_{\mathbb{R}^m} du e^{-i\xi\cdot\eta} g(u) \mathcal{F}(f*g)(\xi) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Teorema

A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}_m \to \mathcal{S}_m$ é uma bijeção com $\mathcal{F}^4 = I$. Para todos $f, g \in \mathcal{S}_m$ e $x \in \mathbb{R}^m$, temos que:

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot x} g(\xi) d\xi$$

$$\langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f | g \rangle_{L^2}$$

$$f * g \in \mathcal{S}_m,\ \mathcal{F}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

Proposição

Seja $u \in \mathcal{S}_m$, então vale o seguinte resultado:

$$c_2 \left(\|u\|_2^2 + \|\xi\|_2^k \|\hat{u}\|_2^2 \right) \leq \|u\|_{k,2}^2 \leq c_1 \left(\|u\|_2^2 + \|\xi\|_2^k \|\hat{u}\|_2^2 \right)$$

Como S_m é denso em

$$W^{k,2} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m)/|\xi|_2^k \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^m)\},$$

temos

$$\|u\|_{k,2} \cong \|u\|_2 + \||\xi|_2^k \hat{u}\|_2 \qquad (1.24)$$

Teorema de Plancherel

A. Existe um único operador contínuo $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\tilde{\mathcal{F}}|_{L^1 \cap L^2} = \mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}.$$

B. $\tilde{\mathcal{F}}$ é unitário e vale a fórmula $\mathcal{F}^2 = J$, onde $J : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ é o operador $J\phi(x) = \phi(-x)$

3

Exemplo 1.46

Seja $E = L^2(\mathbb{R}^m)$, $A = \Delta$, e
$D(A) = W^{2,2} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) / |\xi|_2^2 \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^m)\}$

$$\|u\|_{2,2} \cong \|u\|_2 + \||\xi|_2^2 \hat{u}\|_2$$

O operador A gera um semigrupo de contração em E e é autoadjunto. Além disso, sua norma do gráfico é equivalente a norma de $W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$.

De fato, a equivalência de normas segue de (1.24) e pelo Teorema de Plancherel, já que $\mathcal{F}(\Delta u) = i^2 |\xi|_2^2 \mathcal{F}(u) = -|\xi|_2^2 \mathcal{F}(u)$ pela Proposição 23 para $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$. Afirmamos que D(A) é denso em $L^2(\mathbb{R}^m)$ já que contém $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$.
Seja $f \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$. Para checar a condição da imagem (ou seja, resolver o problema eliptíco $\lambda u - \Delta u = f$), estimamos

$$\left| \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|_2^2} \right| c_\lambda \leq c_\lambda \hat{f} \text{ com } \mathrm{c}_\lambda := \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|}, & \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0 \\ \frac{1}{|Im(\lambda)|}, & \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0 \end{cases}$$

Graças ao Teorema de Plancherel, $\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|_2^2}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^m)$, então podemos definir:

$$u := R(\lambda)f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|_2^2}\right) \tag{1.25}$$

Pelo Teorema de Plancherel, também obtemos :

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2 = \left\|\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|_2^2}\right\| \leq c_\lambda \|f\|_2 \ i.e. \ \|R(\lambda)\|_{B(E)} \leq c_\lambda$$

Ainda mais

$$|\xi|_2^2|\hat{u}| = |\xi|_2^2 \frac{|\hat{f}|}{(\lambda+|\xi|_2^2)} \leq c'_\lambda |\hat{f}| \text{ para constantes } c_\lambda.$$

De (1.24), segue que $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$ com norma

$$\|u\|_{2,2} \leq c(\|u\| + \||\xi|_2^2\hat{u}\|) \leq \tilde{c}_\lambda \|f\|_2$$

Com isso , $R(\lambda)$ mapeia $L^2(\mathbb{R}^m)$ continuamente em $W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$.
Para usar

$$\lambda u - \Delta u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + |\xi|_2^2}\hat{f} - i^2\frac{|\xi|^2}{\lambda + |\xi|_2^2}\hat{f}\right) = f, \qquad (1.26)$$

Tomamos funções $f_n \in S_m$ tendendo a $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ com $n \to \infty$. O mapa $u_n := R(\lambda)f_n \in S_n$ converge para u em $W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$ e satisfaz $\lambda u_n - \Delta u_n = f_n$ por (1.26). Tomando $n \to \infty$, encontramos $\lambda u - \Delta u = f$ então $\lambda I - A$ é bijetor com a inversa limitada $R(\lambda)$.

Assim, A é fechado (Observação 1.17) e o espectro $\sigma(A)$ está contido em $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Por um exemplo das notas de aula, $\sigma(A) = \mathbb{R}_{\leq 0}$ implica que a estimativa de Hile-Yoshida para $\lambda > 0$.
Assim, A gera um semi-grupo de contração (Teorema 1.27, $\omega = 0$) em $L^2(\mathbb{R}^m)$. Seja $u, v \in W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$. Pela Fórmula de Green e $\Delta = \operatorname{div}(\nabla)$, segue que:

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{div}(\nabla \mathrm{u})\overline{\mathrm{v}}\mathrm{dx} = -\int_{\mathbb{R}^\mathrm{m}} \nabla \mathrm{u} \cdot \nabla \overline{\mathrm{v}}\mathrm{dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} u \,\mathrm{div}(\nabla \overline{\mathrm{v}})\mathrm{dx} = (\mathrm{u}, \mathrm{Av})\end{aligned}$$

Então A é simétrico. Como $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0}$,segue que A é autoadjunto.

4

Exemplo 1.47

Seja $E = C_0(\mathbb{R}^m)$, $D(A) = \{u \in C^2/u, \Delta u \in E\}$, e o operador $A_0 = \Delta$. O operador A_0 tem fecho A e gera um semigrupo de contração em E. Se $m = 1$, temos que $Au = u''$ e
$D(A) = D(A_0) = C_0^2 := \{u \in C^2(\mathbb{R})/u, u', u'' \in E\}$.

De fato, o domínio de A_0 é denso em E pois $C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq D(A_0)$.
Seja $u \in D(A_0)$. Pelo Exemplo 1.31, temos que o funcional
$\varphi = \overline{u}(x_0)\delta x_0$ pertence a $J(u)$ onde $x_0 \in \mathbb{R}^m$ satisfaz $|u(x_0)| = \|u\|_\infty$.
Definindo $h(x) = Re(\overline{u}(x_0)u(x)) \in D(A_0)$ obtemos

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{A_0 u}, \varphi\rangle = \mathrm{Re}(\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{x_0})\Delta \mathrm{u}(\mathrm{x_0})) = \Delta \mathrm{h}(\mathrm{x_0}).$$

Sabemos, do Exemplo 1.34, que $h(x_0)$ é um máximo de $h(x)$. Por um Teorema de Análise em $\mathbb{R}^m$, $D^2h(x_0)$ é negativo e assim Δ
$h(x_0) = Tr(D^2h(x_0)) \leq 0$, ou seja, A_0 é dissipativo.
A equação (1.26) para $\lambda = 1$ nos mostra que a imagem de $I - A_0$ é um subespaço denso de S_m. Pelo Teorema de Lumer-Phillips, concluímos que $\overline{A}_0$ gera um semigrupo de contração.

Seja $m = 1$ e $u \in D(A)$. Como $A = \overline{A}_0$ existem funções $u_n \in D(A_0)$ tais que $u_n \to u$ e $u_n'' \to Au$ em E quando $n \to \infty$.
Precisamos controlar a 1º derivada. Para conseguir isso, tomamos um intervalo J com comprimento $|J| > 0$, uma função $v \in C(J)$ com v e v'' limitados e $\delta \in (0, |J|)$, e pontos $r, s \in J$ com $\delta < s - r < 2\delta$, pelo Teorema de Taylor, temos um número $\sigma \in (r, s)$ tal que:

$$v(s) = v(r) + v'(r)(r - s) + \frac{1}{2}v''(\sigma)(s - r)^2$$

$$v'(s) = \frac{v(s) - v(r)}{s - r} - \frac{1}{2}v''(\sigma)(s - r)$$

Temos:

$$|v'(r)| \leq \frac{2}{\delta}\underset{\tau\in[r,r+\delta]}{máx}|v(\tau)| + \delta \max_{\tau\in[r,r+\delta]} |v''(\tau)| \qquad (1.28)$$

$$\|v'\|_\infty \leq \frac{2}{\delta}\|v\|_\infty + \delta\|v''\|_\infty$$

Inserindo $v = u_n$, inferimos que $u_n' \in E$. Com $v = u_n - u_m$, também segue que u_n' converge em E para um função em $f \in E$. Como resultado, u pertence a $C^1(\mathbb{R})$ com $u' = f \in E$. Usando $u_n'' \to Au$, concluímos que $u \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $Au = u''$.

Devemos fazer uma observação para o caso $m = 2$. Neste caso o domínio de $D(A)$ não é denso em $C_0^2(\mathbb{R}^m)$ como no exemplo (1.47). De fato, seja a função:

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2), & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Segue que a sua segunda derivada é:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}\tilde{u}(x,y) =& 2\ln(x^2 + y^2) + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ \frac{(6x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2) - 4x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

É limitado em $B(0,1)$, mas a funções $\tilde{u}, \nabla\tilde{u}$ e $\Delta\tilde{u} = 8\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, são limitadas em $B(0,1)$. Tomando o mapa suave φ com $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathrm{B}(0,2)$, que é igual a 1 em $B(0,1)$. Então os mapas

$$u = \varphi\tilde{u} \text{ e } \mathrm{u} - \Delta\mathrm{u} = \varphi(\tilde{\mathrm{u}} - \Delta\tilde{\mathrm{u}}) - 2\nabla\varphi \cdot \nabla\tilde{\mathrm{u}} - \tilde{\mathrm{u}}\Delta\varphi.$$

São limitadas e tem suporte compacto em $\mathbb{R}^m$, mas u não pertence a $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$. Podemos construir um exemplo em $C_0(\mathbb{R}^m)$ ao invés de $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ usando $\ln\ln$.
Com um pouco mais de trabalho podemos mostrar que o operador $A_1 = \Delta$ com domínio $D(A) = \{u \in C_0(\mathbb{R}^m)/\ \forall p \in (1,\infty), r > 0 : u \in W^{2,p}(B(0,r)), \Delta u \in C_0(\mathbb{R}^m)\}$ é fechado em E e que $\rho(A_1)$ contém a semirreta (ω, ∞). Desde que $D(A_0) \subseteq D(A_1)$, obtemos que $A = \overline{A}_0 \subseteq A_1$, e que $A = A_1$ (Lema 1.24).

5

Exemplo 1.48

Seja $E = C_0(0,1)$, $D(A) = \{u \in C^2(0,1)/u, u'' \in E\}$ e $Au = u''$. O operador A gera um semigrupo de contração em E, e sua norma do gráfico é equivalente a norma do $C^2([0,1])$.

De fato das normas seguem de (1.28), e do fato que

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \|f^i\|_\infty \Rightarrow \|f\|_{C^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

Seja $f \in E$, tome $\varepsilon > 0$, como no Exemplo 1.19 podemos achar um mapa $\tilde{f} \in C_c(0,1)$ com $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainda mais, procedendo como na prova da Proposição 4.13, podemos construir uma função $g \in C_0^\infty(0,1) \subseteq D(A)$ satisfazendo $\|\tilde{f} - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Assim, A é densamente definido. A dissipatividade de A fora mostrada no exemplo anterior, onde o argumento x_0 do máximo de $|u|$ pertence a $(0,1)$ já que os casos $x_0 \in \{0,1\}$ são excluídos pela condição de contorno.

Seja $f \in E$. Vamos estendê-la para 0 para uma função $f \in C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. Seja $\lambda > 0$ e tomemos $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$. Então definimos:

$$\begin{aligned} v =& R(\lambda)f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2 + |\xi|_2^2}\hat{f}\right) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\mathcal{F}^{-1}((\mu^2 + |\xi|_2^2)^{-1}) * f =: k * f \in W^{2,2}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Usando a transformação $\eta = \frac{\xi}{\mu}$ calculamos:

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\xi}}{\mu^2 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2\pi\mu^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\xi}}{1 + (\frac{\xi}{\mu})^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\mu}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\mu\eta}}{1 + \eta^2} d\eta = \frac{e^{-\mu|s|}}{2\mu} \end{aligned}$$

para $s \in [0, 1]$ Assim obtemos:

$$v(s) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 e^{-\mu|s-\tau|} f(\tau) d\tau, \; s \in [0,1]$$

Lembrando que $\operatorname{supp} \mathrm{f} \subseteq [0,1]$. Como no Exemplo 1.49, esta função pertence a $C^2([0,1])$(como será mostrado no referido exemplo) e resolve $\lambda v - v'' = f$ mesmo para $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$, mas não satisfaz as condições de contorno $v(0) = 0 = v(1)$, exceto para f específicas.

Para encontrar uma solução, vamos "chutar " a seguinte solução:

$$u(s) = a(f,\mu)e^{\mu s} + b(f,\mu)e^{-\mu s} + v(s)$$

Para $s \in [0,1]$ e coeficientes desconhecidos $a(f,\mu), b(f,\mu) \in \mathbb{C}$. Observe que ainda temos que $u(s) \in C^2([0,1])$ e $\lambda u - u'' = f$ para $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$. Queremos escolher $a(f,\mu)$ e $b(f,\mu)$ tal que $u \in D(A)$ e que satisfaça $u(0) = 0 = u(1)$. Essa condição é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$u(0) \Rightarrow a(f,\mu) + b(f,\mu) = -\frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau,$$

$$u(1) \Rightarrow a(f,\mu)e^{\mu} + b(f,\mu)e^{-\mu} = -\frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{\mu(\tau-1)} f(\tau)d\tau$$

Que possui solução única, a saber:

$$\begin{pmatrix} a(f,\mu) \\ b(f,\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu(e^{\mu} - e^{-\mu})} \begin{pmatrix} e^{-\mu}\int_0^1 (e^{\mu\tau} - e^{-\mu\tau}) f(\tau)d\tau \\ \int_0^1 (e^{\mu}e^{-\mu\tau} - e^{-\mu}e^{\mu\tau}) f(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

Segue então que $\lambda I - A$ é bijetor.

Pelo Teorema de Lumer-Phillips, A é fechado e gera um semigrupo de contração em E e também obtemos a fórmula

$$R(\lambda, A)f(s) = a(f,\mu)e^{\mu s} + b(f,\mu)e^{-\mu s} + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu|s-\tau|}f(\tau)d\tau \qquad (1.29)$$

Para $s \in [0,1]$, $f \in C_0(0,1)$ e $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$.

Mostraremos resultado análogo para $L^p((0,1))$. Aqui checamos a dissipatividade em L^p também para $p \neq 2$.

6

Exemplo 1.49

Seja $E = L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$, $Au = u''$ e $D(A) = \{u \in W^{2,p}(0,1)/u(0) = 0 = u(1)\} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(0,1)$, (temos que $W^{1,p}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$). O operador A gera um semigrupo de contração em E e sua norma é equivalente à $\|\cdot\|_{2,p}$.

De fato, a última afirmação segue pela Proposição 3.31[ST]. O domínio $D(A)$ é denso pela Proposição 4.13 [FA] já que contém $C_0^\infty(0,1)$. Podemos estender o operador $R(\lambda, A)$ de (1.29) para um mapa $R(\lambda)$ em $E = L^p(0,1)$ para $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$. Reescrevemos:

$$\tilde{v}(s) := \int_0^1 e^{-\mu|s-\tau|} f(\tau)d\tau = e^{-\mu s}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + e^{\mu s}\int_0^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau$$

para $f \in E$ e $s \in [0,1]$.

Pela Fórmula de Green, nós podemos calcular:

$$\tilde{v}'(s) = -\mu e^{-\mu s}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + f(s) + \mu e^{\mu s}\int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau - f(s)$$

Como o termo $f(s)$ desaparece,

$$\tilde{v} = 2\mu v$$

pertence a $C^1([0,1])$. Analogamente, segue que $v'' \in L^p(0,1)$:

$$v(s) = \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu|s-\tau|} f(\tau)d\tau = \frac{1}{2\mu}\left[e^{-\mu s}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{\mu s}\int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau \right.$$

$$v'(s) = \frac{1}{2\mu}\left[-\mu e^{-\mu s}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + f(s) + \mu e^{\mu s}\int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau - f(s)\right]$$

$$v'(s) = -\frac{e^{-\mu s}}{2}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + \frac{e^{\mu s}}{2}\int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau$$

$$v''(s) = \frac{-\mu e^{-\mu s}}{2}\int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau)d\tau + \frac{\mu e^{\mu s}}{2}\int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau)d\tau$$

$$- \frac{e^{-\mu s}}{2}\left[e^{\mu\tau} f(\tau)\right]_0^s + \frac{e^{\mu s}}{2}\left[e^{-\mu\tau} f(\tau)\right]_s^1$$

$$v''(s) = \frac{-\mu e^{-\mu s}}{2} \int_0^s e^{\mu\tau} f(\tau) d\tau + \frac{\mu e^{\mu s}}{2} \int_s^1 e^{-\mu\tau} f(\tau) d\tau - f(s).$$

E v satisfaz $\lambda v - v'' = f$. Como no exemplo anterior podemos afirmar que $u = R(\lambda) f$ é um elemento de $D(A)$ e satisfaz $\lambda u - u'' = f$. Para aplicar o Teorema de Lumer-Phillips nos falta checar a dissipatividade. Vamos fazer para o caso $p \in [2, \infty)$. Seja $u \in D(A)$. Definimos $w = |u|^{p-2}\overline{u}$ que pertence a $J(u)$ pelo Exemplo 1.31. Note que $w(0) = 0 = w(1)$ pelas condições de contorno. Pela Observação 1.42, temos o mergulho $W^{2,p}(0,1) \hookrightarrow C^1([0,1])$, então w está contido em $C^1([0,1])$.

Como $p \geq 2$, podemos mostrar que

$$w' = \frac{d}{ds}((u\overline{u})^{\frac{p-2}{2}}\overline{u}) = |u|^{p-4}|\overline{u}|^2\overline{u}' + \frac{p-2}{2}(|u|^2)^{\frac{p-2}{2}-1}(u'\overline{u} + u\overline{u}')\overline{u}$$
$$= |u|^{p-4}(|\overline{u}|^2\overline{u}' + (p-2)\mathrm{Re}(\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}')\overline{\mathrm{u}})$$

Pela fórmula de de Green e pelas condições de contorno $w(0) = 0 = w(1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle \mathrm{Au}, \mathrm{w}\rangle &= \mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{u}''\mathrm{w}\mathrm{ds} = -\mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{u}'\mathrm{w}'\mathrm{ds} + \mathrm{u}'\mathrm{w}|_0^1 \\ &= -\int_0^1 |u|^{p-4}(|\overline{u}u'|^2 + (p-2)(\mathrm{Re}(\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}'))^2)\mathrm{ds} \\ &= -\int_0^1 |u|^{p-4}((\mathrm{Im}(\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}'))^2 + (\mathrm{p}-1)(\mathrm{Re}(\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}'))^2)\mathrm{ds} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Agora A é dissipativo, e pelo Teorema de Lumer-Phillips, A gera um semigrupo de contração, e $R(\lambda)$ é o resolvente de A.

O último exemplo é tal que A seja dissipativo e não seja um gerador e A^* é não dissipativo. Isto ocorre pois nós impomos muitas condições de fronteira, ao contrário dos casos anteriores.

7

Exemplo 1.50

Seja $E = L^2(0,1), Au = u''$, e $D(A) = \{u \in W^{2,2}(0,1)/u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\} = W_0^{2,2}(0,1)$. Então A é fechado, densamente definido, dissipativo, e simétrico, mas não é gerador e não é autoadjunto, e A^* não é dissipativo .

De fato, novamente a densidade de A segue da Proposição 4.13 [FA]. Para checar o fato de ser fechado, tome $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \to u$ e $u'' \to v$ em E quando $n \to \infty$. Pela Proposição 3.31 [ST], temos também que (u_n') converge em E . Pela Observação 1.42 deduzimos que $u \in W^{2,2}(0,1)$ e $u_n \to u$ em $W^{2,2}(0,1)$. As condições de fronteira para u_n valem para u pelos limites de (u_n) e (u_n') pois $W^{1,2}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ pela Observação 1.42. Assim $u \in D(A)$ e portanto A é fechado.

Seja $u \in D(A)$ e $v \in W^{2,2}(0,1)$. Usando a Fórmula de Green e as condições de fronteira de u, temos que

$$(Au, v) = \int_0^1 u''\overline{v}ds = -\int_0^1 u'\overline{v}' + u'\overline{v}|_0^1 = \int_0^1 u\overline{v}''ds + u\overline{v}'|_0^1 = (u, Av)$$

Consequentemente A é simétrico (tome $v \in D(A)$) e dissipativo (tome $v = u$). Ainda mais o operador ∂^2 com domínio $W^{2,2}(0,1)$ é uma restrição de A e também de A^*.
Seja $v \in D(A^*)$. Como no Exemplo 1.43 podemos ver que $A^*v \in E$ e é a segunda derivada fraca de $v \in E$. O Lema 3.5 [ST] nos dá funções suaves v_n tais que $v_n \to v$ e $v_n'' \to v''$ em $L^2(a,b)$, $\forall\ 0 < a < b < 1$. Então v_n' tende no mesmo sentido para uma função $g \in E$, pela Proposição 3.31 [ST]. Pelo Lema 3.5 [ST] deduzimos que g é a derivada da fraca de v, e assim v pertence a $W^{2,2,}(0,1)$. Segue que $A^* = \partial^2$ com $D(A^*) = W^{2,2}(0,1) \neq D(A)$. Assim A não é autoadjunto.

Como $\partial^2 e^{\mu s} = \lambda e^{\mu s}$, para $\mu = \sqrt{\lambda}$ e $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$, o operador $\lambda I - A^*$ não é injetor. Como resultado, A^* não é dissipativo no sentido da Proposição 1.39 e o espectro de A contém $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ pelo Teorema 1.24 [ST]. Em particular, A não é um gerador de semigrupo de contração.

Referências

- Roland Schnaubelt (2020)
  Lecture Notes Evolution Equations
- Roland Schnaubelt (2020)
  Lecture Notes Spectral Theory Evolution Equation
- Roland Schnaubelt (2017/2018)
  Functional Analysis Lecture Notes of Winter Semester 2017/18

Valeu! :)