Prova 1 de MAT0105, IME-USP

Aluno(a): Test System

Início da prova:

Instruções:

— Justifique suas afirmações. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

— Escreva o nome e NUSP em todas as folhas. A prova pode ser escrita só pela caneta.

— É proibido consultar qualquer material pelo Internet, celular, ou pedir ajuda das outras pessoas. Pode usar apenas suas anotações.

Questões da Prova

Q1) [*1,0 ponto*]

Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base. Decide se os vetores $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$ são linearmente independentes.

Q2) [*1,0 ponto*] Sejam os vetores $\vec{a} = (-1, -1, 0)$ e $\vec{b} = (-1, -1, 1)$ numa base ortonormal. Ache um vetor $\vec{c}$ ortogonal aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e tal que $\|\vec{c}\| = 4$.

Q3) [*1,0 ponto*]

Dados $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -3, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, a, a+2)$ numa base ortonormal. Encontre o paremetro a de modo que o volume do paralelepípedo com arestas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ seja 5.

Q4) [*2,0 pontos*] Dados os pontos $A = (1, 0, 1), B = (0, 1, 1), C = (1, 0, 0), D = (0, 2, 2)$ num sistema cartesiano. Ache a altura do parapelepípedo formado por $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ relativa ao vértice A.

Q5) [*1,0 ponto*] Dado um vetor $\vec{a} = (0, 3, -2)$ numa base ortonormal. Escreva o vetor $\vec{d} = (2, 0, 1)$ como soma de dois vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que $\vec{b} \perp \vec{a}$ e $\vec{c} \| \vec{a}$.

Q6) [*4,0 pontos*]

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo.

a) Seja M o ponto no segmento AE tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ME}$. Ache as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{FM}$ na base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b) Seja N um ponto no segmento CG tal que $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NG}$. Ache as coordenadas do ponto N nos sistemas das coordenadas $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ e $(E, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Boa prova!

Q1 - $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são base $\Rightarrow u, v, w$ são LI

Logo, $\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Agora, para $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$:

$$x(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + y(3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + z(-\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}) =$$

$$= (x + 3y - z)\vec{u} + (-x + y + 3z)\vec{v} + (x - y + z)\vec{w} = 0$$

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Big\} \; z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

os vetores são LI

Q2. $\vec{\alpha} = (-1, -1, 0)$; $\vec{\beta} = (-1, -1, 1)$

para $\vec{c}$ ortogonal a $\vec{\alpha}$ e a $\vec{\beta}$ quero $\vec{c} \parallel \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Sendo $c = (x, y, z)$ e $\|\vec{c}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$,

temos $(x, y, z) = \alpha(-1, 1, 0) = (-\alpha, \alpha, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + 0 = 16 \Rightarrow \alpha^2 = 8 \Rightarrow \alpha = \pm 2\sqrt{2}$

$c = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ ou $c = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$

Q3 - O volume do paralelepípedo é dado pelo produto misto entre os três vetores:

$$V_P = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = |-3(a+2) - 1(a)| =$$

$$= |-3a - 6 - a| = |-4a - 6| = 5 \quad \begin{cases} -4a - 6 = 5 \Rightarrow a = -\frac{11}{4} \\ -4a - 6 = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Q4. $\vec{BA} = (1, -1, 0)$; $\vec{BC} = (1, -1, -1)$; $\vec{BD} = (0, 1, 1)$

Altura vai ser $h = \| proj_{\vec{BA}} (\vec{BC} \wedge \vec{BD}) \|$

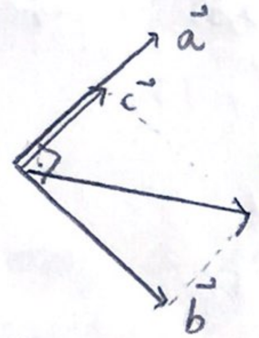
$$\vec{BC} \wedge \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1) = \vec{u}$$

$$h = \| proj_{\vec{BA}} \vec{u} \| = \left\| \frac{(1, -1, 0) \cdot (0, -1, 1)}{(1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot (1, -1, 0) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{2} (1, -1, 0) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Q.5 $\vec{a} = (0, 3, -2)$ $\qquad \vec{d} = (2, 0, 1)$

$\vec{b} \perp \vec{a}$ e $c \parallel \vec{a}$



$$\vec{c} = \text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{d} = \frac{(2,0,1) \cdot (0,3,-2)}{\|(0,3,-2)\|^2} \cdot (0,3,-2)$$

$$\vec{c} = \frac{-2}{13}(0, 3, -2)$$

$$\vec{d} = (2,0,1) = \left(0, \frac{-6}{13}, \frac{4}{13}\right) + \vec{b}$$

$$b = (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6/13 \\ z = 9/13 \end{cases}$$

$$\vec{d} = -\frac{2}{13} \underbrace{(0, 3, -2)}_{c} + \frac{1}{13} \underbrace{(26, 6, 9)}_{b}$$

Q6.

a) $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{ME} \Rightarrow \vec{AE} = \vec{AM} + \vec{ME} = \vec{AM} + 3\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{AE}}{4}$

1. $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$

$\rightsquigarrow \vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{DA} + \vec{BA} = -\vec{AD} - \vec{AB}$

$\vec{CM} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \frac{\vec{AE}}{4} \Rightarrow CM = (-1, -1, \frac{1}{4})$

2. $\vec{FM} = \vec{FA} + \vec{AM} = \vec{FB} + \vec{BA} + \vec{AM}$

$\rightsquigarrow \vec{FB} = \vec{EA} = -\vec{AE}$

$\vec{FM} = -\vec{AE} - \vec{AB} + \frac{\vec{AE}}{4} = -\vec{AB} - \frac{3\vec{AE}}{4} \Rightarrow FM = (-1, 0, -\frac{3}{4})$

b) $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{NG} \Rightarrow \vec{CG} = \vec{CN} + \vec{NG} = \frac{3}{2}\vec{NG}$

1. Para achar o ponto N, neste referencial, procuro o vetor $\vec{AN}$:

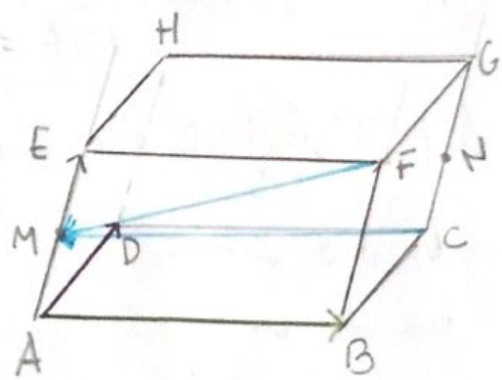
$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CN} =$

$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{CG}$

$\rightsquigarrow \vec{DC} = \vec{AB}$ ~ $\vec{CG} = \vec{AE}$

$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}$

$\Rightarrow N = (1, 1, \frac{1}{3})$



~~Daí, $\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN} = \vec{AD} + \vec{AN'} = \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{BN'}$~~ =

~~$= \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{N'F} = \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AE}$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$N = (1, 1, \frac{1}{3})$~~

2. Achar o vetor $\vec{EN}$, para encontrar o ponto N:

$$\vec{EN} = \vec{EA} + \vec{AN} = -\vec{AE} + \vec{AN} =$$

$$= -\vec{AE} + \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AE}$$

$N = (1, 1, -2/3)$