Cálculo II — Lista 5

Exercício 1.
Determine os pontos críticos das funções dadas e classifique-os (ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela):

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;

(b) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$;

(c) $g(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$;

(d) $g(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$;

(e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy$, com $x > 0$ e $y > 0$.

Exercício 2.
Ache os extremos globais das funções:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

(c) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$

Exercício 3.
Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ função que representa uma distribuição de temperatura no plano. Considere a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 4\ \}$. Determine o ponto do conjunto D onde a temperatura é a menor possível.

Exercício 4.
Ache o mínimo e o maximo da função $f(x, y)$ na região D:

(a) $f(x, y) = xy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$;

(b) $f(x, y) = 2x + y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$;

(c) $f(x, y) = 3x + y$, com $x^2 + 2y^2 = 1$;

(d) $f(x, y) = xy$, com $x^2 + 4y^2 = 8$;

(e) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, com $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$;

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$;

(g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2+y}$; $|x| \leqslant 1$; $|y| \leqslant 1$.

Exercício 5.

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

(b) Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

(c) Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x + y + z = 12$. Determine a distância máxima e mínima entre os pontos de C e o plano $z = 0$.

(d) Considere a reta dada por interseção dos planos

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

Determine o ponto dessa reta que se encontra mais próximo da origem.

Exercício 6.

Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 = 4;$

(b) $f(x, y) = xy, \qquad 4x^2 + 9y^2 = 36;$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad 3x + 2y + z = 6;$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \qquad x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36;$

(e) $f(x, y, z) = xyz, \qquad 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6.$

Exercício 7.

Ache máximo e mínimo relativo da função dada:

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, com $x^2 + y^2 = 1$ e $4x + 4y - z^2 = 0$.

(b) $f(x, y, z) = x - y$, com $x^2 + z^2 - y = 0$ e $y = 2z$.

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 6$.

Exercício 8.

Suponha que a temperatura num ponto (x, y) de uma placa de metal é $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?