Cálculo II — Lista 4.

Exercício 1.
Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$; $P = (-2, 2)$;

(b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P = (-2, 0)$;

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P = (2, -1)$.

Exercício 2.
Determine a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{u}$:
(a) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$; $P = (\pi/3; -2\pi/3)$; $\vec{u} = (2, 3)$;
(b) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P = (2, 1)$; $\vec{u} = (1, 2)$.

Exercício 3.
Determine a derivada direcional máxima de f no ponto P e a direção em que isto ocorre:
(a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$; $P = (1, 5)$.
(b) $f(x, y) = \sqrt{xy^2}$; $P = (2, 2)$.

Exercício 4.
Suponha que f é diferenciável em $(1, 2)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ Determine:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;

(c) a derivada direcional de f em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.

Exercício 5.
Encontre a derivada direcional de $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ no ponto $(2, 1)$ em direção ao ponto $(1, 1)$.

Exercício 6.
Mostre que a derivada direcional da função $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$ em qualquer ponto da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ na direção do vetor normal da elipse é 0.

Exercício 7.
Dados $z = 3xy - 4y^2$; $x = 2se^r$; $y = re^{-s}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras expressando z em termos de r e s;

Exercício 8.

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

(d) Porque as derivadas mistas não são iguais?

Exercício 9.

Uma função $z = f(x, y)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

é chamada *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$;

(b) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$.

Exercício 10.

Determine o maior conjunto aberto onde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

Exercício 11.

Seja $y = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, para todo x, onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

Exercício 12.

Seja $r = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0,$$

para todo (x, y), onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.