Lista 3

MAT3210 — 2° SEMESTRE DE 2019

Exercício 1.
Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = 7xy^3 - 2x^3 + 8y^2 - \dfrac{1}{4}$,

(b) $f(x,y) = \tan(xy) - \dfrac{1}{xy}$,

(c) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^4) + 3x$,

(d) $f(x,y) = e^{3x^2+y^3} - 7x + \dfrac{1}{x+2y}$,

(e) $f(x,y) = x\sqrt{3x^2y + 7y^3}$,

(f) $f(x,y) = \ln(x^2 + 4y^2 + 2)$,

(g) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$,

(h) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2y}{x^2 - 4y}$,

(i) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(j) $f(x,y) = \ln(xy^3 + yx^2 + z)$, onde $z = \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}$.

Exercício 2.
Determine o conjunto dos pontos onde as funções admitem derivadas parciais:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)^3}{(x+1)^2 + y^2} + 5x, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ -5, & \text{se } (x,y) = (-1,0), \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

Exercício 3.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $h(4) = 3$ e $h'(4) = -1$.
Considere $f(x,y) = xh(3x^2 + y^3)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

Exercício 4.

(a) Seja $z = x \sin \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

(b) Seja $f(x,y) = x^3y - y^3x$. Procure

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

no ponto $(1,2)$.

Exercício 5.

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 6.

Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável.

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

d)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Exercício 7.

Ache a equação do plano tangente a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = 2x^2y$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

(b) $z = xe^{x^2-y^2}$, no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

(c) $z = e^x \ln(y)$, no ponto $(3, 1, 0)$.

(d) $z = \arctan(x - 2y)$, no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

Exercício 8.
Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

Exercício 9.
Determine o plano que passa por $A = (1, 1, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

Exercício 10.
Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

Exercício 11.
Calcule os valores aproximados das:

(a) $\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{7.9}$.

(b) $1.04^{2.02}$.

(c) $\sqrt{0.98^2 + 1.01^2 + 2.03^2}$.

(d) $e^{1.01^2-1.002^2}$.

Exercício 12.
Calcule as derivadas mencionadas pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida e aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$, $\dfrac{dz}{dt} =?$

(b) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$, $\dfrac{dz}{dt} =?$

(c) $z = x^2y - y^2x$, $x = u \sin t$, $y = u \cos t$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

(d) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

Exercício 13.
Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Exercício 14.
Suponha que para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.