Cálculo II — Lista 1.
Aplicações da integral definida.

Volumes de revolução

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:
   (a) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2};$
   (b) $1 \leqslant x \leqslant 4, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x};$
   (c) $2x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y;$
   (d) $x^2 \leqslant y \leqslant x;$
   (e) $0 \leqslant y \leqslant x, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2;$
   (f) $y \geqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2;$
   (g) $\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$
2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:
   (a) $1 \leqslant x \leqslant e, \quad 0 \leqslant y \leqslant \ln x;$
   (b) $0 \leqslant x \leqslant 8, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{x};$
   (c) $1 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2 - 1;$
   (d) $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \arctan x;$
   (e) $1 \leqslant x \leqslant 4, \quad 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{x};$
   (f) $y \geqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2;$
   (g) $0 \leqslant x \leqslant 2, \quad \sqrt{x-1} \leqslant y, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2.$
3. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da parábola $y^2 = 4x$ em torno do eixo x.
4. Uma elipse com eixos $2a$ e $2b$ gira-se: 1) em torno do eixo x; 2) em torno do eixo y. Calcule os volumes dos sólidos correspondentes. Em caso particular $a = b$ calcule o volume da bola.
5. Um conjunto limitado pelas parábolas $y^2 = x$ e $x^2 = y$ gira-se em torno do eixo x. Calcule o volume do solido.
6. Calcule o volume do solido obtido pela rotação do conjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2, \}$$
em torno do eixo y.

Área da Superfície de revolução

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

   (b) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \leqslant x \leqslant R, (R > 0);$

   (c) $f(x) = x^2, \qquad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2};$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4;$

   (e) $f(x) = \tan x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

2. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ (de $x = 0$ ao $x = a$).

Comprimento das Curvas

1. Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

   (b) $f(x) = \dfrac{4}{3}x + 3, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;$

   (c) $f(x) = \ln(x), \qquad 1 \leqslant x < e;$

   (d) $f(x) = \ln(1 - x^2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2};$

   (e) $f(x) = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, \qquad a \leqslant x \leqslant b;$

   (f) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4};$

   (g) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

   (h) $f(x) = e^x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

2. Calcule o comprimento das curvas dadas:

   (a) $x(t) = 3t - 1, \quad y(t) = t + 1, \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2;$

   (b) $x(t) = 3t, \quad y(t) = 2t^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

   (c) $x(t) = 1 - \cos t, \quad y(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (d) $x(t) = \dfrac{t^2}{2}, \quad y(t) = \dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

   (e) $x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (f) $x(t) = a \cos^5 t, \quad y(t) = a \operatorname{sen}^5 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (g) $x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

Coordenadas polares

1. Desenhe a curva dada (em coordenadas polares):

   a) $\rho = e^{-\theta}, \qquad \theta \geqslant 0,$

   b) $\rho = \cos(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

   c) $\rho = 2, \qquad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

   d) $\rho = \cos(4\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3,$

   e) $\rho^2 = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

   f) $\rho = 1 - \operatorname{sen}(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

g) $\rho = \cos^2(\theta) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

2. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta$,
   b) $\rho = \cos(2\theta)$,
   c) $\rho^2 = \cos\theta, \rho \geqslant 0$,
   d) $\rho = \cos(3\theta)$.

3. Calcule a área da interseção das regiões limitada pelas curvas dadas em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$.
   b) $\rho = \operatorname{sen}(\theta)$ e $\rho = 1 - \cos\theta$.
   c) $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.
   d) $\rho = \cos\theta$ e $\rho = \operatorname{sen}\theta$.
   e) $\rho^2 = \cos\theta$ e $\rho^2 = \operatorname{sen}\theta$ com $\rho \geqslant 0$,
   f) $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.

4. Calcule o comprimento da curva dada em coordenadas polares:

   a) $\rho = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
   b) $\rho = 1 + \cos(\theta), 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
   c) $\rho = \frac{1}{\theta}, 1 \leqslant \theta \leqslant \sqrt{3}$.
   d) $\rho = e^{-\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
   e) $\rho = \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$.
   f) $\rho = \theta^2, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Centro de Massa

1. Determine o centro de massa da região A:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$,
   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,
   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$,
   d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,

2. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$,

3. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = 9 - x^2, \qquad -3 \leqslant x \leqslant 3$,

4. Determine o centro de massa da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$, e $g(x) = x^3$.