Cálculo II — Lista 5.
com respostas

Exercício 1.
Determine os pontos críticos das funções dadas e classifique-os (ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela):

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;

(b) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$;

(c) $g(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$;

(d) $g(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$;

(e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy$, com $x > 0$ e $y > 0$.

Solução 1.
(a) $f_x(x, y) = 2x + 3y - 6$, $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$,

$f_y(x, y) = 3x + 8y + 2$, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$, É fácil ver que $(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7})$ é único ponto crítico.

$f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 8$, $f_{xy}(x, y) = 3$, $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 7$.

Logo $H(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$, $f_{xx}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$ e, portanto $f(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) = -\frac{184}{7}$ é mínimo local.

(b) $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y - 5$, $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$,

$f_y(x, y) = 2x + 2y$, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

É fácil ver que $\{(-1, 1), (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})\}$ são pontos críticos.

$f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 2$, $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 4(3x - 1)$.

Logo $H(-1, 1) = -16 < 0$, e, portanto $f(-1, 1) = 3$ é sela;

$H(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 16 > 0$, $f_{xx}(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 10 > 0$ e, portanto $f(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = -\frac{175}{27}$ é mínimo local.

(c) Temos $g_x(x, y) = \frac{2x+2y-6}{3(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^2}$,

$g_y(x, y) = \frac{2x+8y-12}{3(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^2}$, portanto $(2, 1)$ é ponto crítico.

$g_{xx}(x, y) = \frac{6(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+2y-6)^2}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{yy}(x, y) = \frac{24(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+8y-12)^2}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{xy}(x, y) = \frac{6(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+2y-6)(2x+8y-12)}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{xx}(2, 1) = \frac{72}{9\sqrt[3]{12^5}}$, $g_{yy}(2, 1) = \frac{24\cdot 12}{9\sqrt[3]{12^5}}$, $g_{xy}(2, 1) = \frac{72}{9\sqrt[3]{12^5}}$, portanto $H(2, 1) = g_{xx}g_{yy} - g^2_{xy} > 0$.

Como $g_{xx}(2, 1) > 0$, $g(2, 1) = -\sqrt[3]{12}$ é mínimo local.

Exercício 2.
Ache os extremos globais das funções:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

(c) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$

Solução 2.
(a) $f_x(x, y) = 2x + 3y + 2$, $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$,
$f_y(x, y) = 3x + 4y + 2$, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$,
$(2, -2)$ é único ponto crítico.
$f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 4$, $f_{xy}(x, y) = 3$, $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$.
Logo $H(2, -2) < 0$ e, portanto $f(2, -2) = 0$ é sela e não existem máximos nem mínimos (locais ou globais).

Exercício 3.
Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ função que representa uma distribuição de temperatura no plano. Considere a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 4\ \}$. Determine o ponto do conjunto D onde a temperatura é a menor possível.

Solução 3.
É fácil ver que não existem os pontos críticos no interior de D. Com $4 = f(0, 0)$ é claramente um máximo local (e global), precisamos estudar os valores da função no bordo, ou seja, os valores de f para $(x, 0)$ com $0 \leqslant x \leqslant 2$, $(0, y)$ com $0 \leqslant y \leqslant 4$, e $(x, -2x + 4)$ com $0 \leqslant x \leqslant 2$. Como para os dois primeiros conjuntos f assume valor mínimo exatamente na interseção com a reta $y = -2x+4$, precisamos analizar apenas o último caso. Assim, $g(x) = f(x, -2x + 4) = -5x^2 + 16x - 12$, $g'(x) = -2(5x - 8)$, g é máximo em $x = 8/5$, logo mínimo nos extremos e, portanto, f é mínimo em $(0, 4)$.

Exercício 4.
Ache o mínimo e o maximo da função $f(x, y)$ na região D:

(a) $f(x, y) = xy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$;

(b) $f(x, y) = 2x + y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$;

(c) $f(x, y) = 3x + y$, com $x^2 + 2y^2 = 1$;

(d) $f(x, y) = xy$, com $x^2 + 4y^2 = 8$;

(e) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, com $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$;

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$;

(g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2+y}$; $|x| \leqslant 1$; $|y| \leqslant 1$.

Solução 4.

(a) O máximo e mínimo são atingidos desde que D é limitada e fechada. Observe que f não possui os pontos criticos no interior de D. Na parte inclinada da fronteira temos $g(x) = f(x, -2x+5) = -2x^2+5x$, $g'(x) = -4x+5 = 0$ e $x = 5/4$. É fácil ver que $x = 5/4$ é ponto de máximo de $g(x)$ e portanto $(\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$ é ponto de máximo de $f(x,y)$. Por outro lado os pontos tais que $x = 0$ ou $y = 0$ (ou $\{(x,0),(0,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5/2, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$) são pontos de mínimo.

Exercício 5.

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

(b) Determine o ponto do plano $x+2y-3z = 4$ mais próximo da origem.

(c) Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x+y+z = 12$. Determine a distância máxima e mínima entre os pontos de C e o plano $z = 0$.

(d) Considere a reta dada por interseção dos planos

$$\begin{cases} x+2y+z = 1, \\ 2x+y+z = 4. \end{cases}$$

Determine o ponto dessa reta que se encontra mais próximo da origem.

Solução 5.

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

A distância entre $(0,0)$ e um ponto (x,y) qualquer é $d = d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Como $d > 0$, temos d mínimo se d^2 for mínimo. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, $\nabla d^2(x,y) = \lambda \nabla f(x,y)$ com $f(x,y) = x^2+xy+y^2 = 3$ obtemos:

$$2x = \lambda(2x+y) \tag{1}$$
$$2y = \lambda(x+2y) \tag{2}$$
$$x^2+xy+y^2 = 3 \tag{3}$$

Multiplicando (1) por y e (2) por x e comparando ambas igualdades, temos $x^2 = y^2$. Logo $x = y$ ou $x = -y$. Substituindo x em (3) temos: no primeiro caso $y = \pm 1$ e no segundo caso $y = \pm\sqrt{3}$. Assim, a distância mínima, $\sqrt{2}$, ocorre nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ da elipse. Observe que a distância máxima é $d(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = d(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \sqrt{6}$.

Exercício 6.

Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

(a) $f(x,y) = x^2-y^2, \qquad x^2+y^2 = 4;$

(b) $f(x,y) = xy, \qquad 4x^2+9y^2 = 36;$

(c) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \qquad 3x+2y+z = 6;$

(d) $f(x,y,z) = x+y+z, \qquad x^2+4y^2+9z^2 = 36;$

(e) $f(x,y,z) = xyz, \qquad 2x^2+3y^2+z^2 = 6.$

Solução 6.
(a)

$$\begin{align} 2x &= \lambda(2x) \tag{4} \\ -2y &= \lambda(2y) \tag{5} \\ x^2 + y^2 &= 4 \tag{6} \end{align}$$

Resolvendo a equação obtemos $xy = -xy$, logo $x = 0$ ou $y = 0$. Se $x = 0$, $y = \pm 2$, se $y = 0$, $x = \pm 2$. Assim, 4 é um máximo e ocorre nos pontos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$, e -4 é um mínimo e ocorre nos pontos $(0, -2)$, $(0, 2)$.

Exercício 7.
Ache máximo e mínimo relativo da função dada:

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, com $x^2 + y^2 = 1$ e $4x + 4y - z^2 = 0$.

(b) $f(x, y, z) = x - y$, com $x^2 + z^2 - y = 0$ e $y = 2z$.

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 6$.

Solução 7.
(a)

$$\begin{align} 1 =& \lambda(2x) + 4\mu \tag{7} \\ 1 =& \lambda(2y) + 4\mu \tag{8} \\ 1 =& -2\mu z \tag{9} \\ x^2 + y^2 =& 1 \tag{10} \\ 4x + 4y - z^2 =& 0 \tag{11} \end{align}$$

$x = \frac{1-4\mu}{2\lambda}$, $y = x$, $z = -\frac{1}{2\mu}$, de (11) temos $\frac{1-4\mu}{2\lambda} = \frac{1}{32\mu^2}$ e (10) nos dá $\mu = \pm\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$, logo $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt[4]{32}) = \sqrt{2} - \sqrt[4]{32}$ é um mínimo e $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt[4]{32}) = \sqrt{2} + \sqrt[4]{32}$ é um máximo.

Exercício 8.
Suponha que a temperatura num ponto (x, y) de uma placa de metal é $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?

Solução 8.