Cálculo II — Lista 4.
com respostas

Exercício 1.
Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$; $P = (-2, 2)$;

(b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P = (-2, 0)$;

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P = (2, -1)$.

Solução 1.
(a) A curva de nível é a parábola $x = -\frac{1}{2}y^2$ e o vetor gradiente é $\nabla f(-2, 2) = (1/4, 1/2)$;

(b) A curva de nível é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ e o vetor gradiente é $\nabla f(-2, 0) = (-4, 0)$;

(c) A curva de nível é a hipérbole $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ e o vetor gradiente é $\nabla f(2, -1) = (4, 2)$.

Exercício 2.
Determine a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{u}$:
(a) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$; $P = (\pi/3; -2\pi/3)$; $\vec{u} = (2, 3)$;
(b) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P = (2, 1)$; $\vec{u} = (1, 2)$.

Solução 2.

(a) A derivada direcional é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\pi/3, -2\pi/3) = 2\cos x \cos y - 3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{7}{4\sqrt{13}}$;

(b)

Exercício 3.
Determine a derivada direcional máxima de f no ponto P e a direção em que isto ocorre:
(a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$; $P = (1, 5)$.
(b) $f(x, y) = \sqrt{xy^2}$; $P = (2, 2)$.

Solução 3.
(a) A derivada direcional máxima ocorre na direção $\nabla f(1, 5) = (6, 10)$ com valor $||(6, 10)|| = 2\sqrt{34}$;

(b)

Exercício 4.

Suponha que f é diferenciável em $(1,2)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ Determine:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$;

(c) a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção e sentido da origem.

Solução 4.

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = 3/5\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 4/5\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -5$ e

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = 4/5\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) - 3/5\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 10.$

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 5;$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -10;$

(c) Observe que neste caso a direção está definida por $\vec{u} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.

Exercício 5.

Encontre a derivada direcional de $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ no ponto $(2,1)$ em direção ao ponto $(1,1)$.

Solução 5.

Observe que neste caso a direção está definida por $\vec{u} = (-1, 0)$.

Exercício 6.

Mostre que a derivada direcional da função $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ em qualquer ponto da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ na direção do vetor normal da elipse é 0.

Solução 6.

A parametrização da elipse é $r(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi)$, o vetor tangente unitário é $\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||} = (\frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos^2 t+1}}, \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+1}})$. É fácil ver que $\vec{N}(t) = (\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+1}}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos^2 t+1}})$ é um vetor ortogonal ao vetor $\vec{T}(t)$, logo aponta na direção do vetor normal à elipse. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{N}(t)}(r(t)) = \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+1}}(-y^2/x^2) + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos^2 t+1}}(2y/x) = \frac{-2\sqrt{2}\cos t\operatorname{sen}^2 t + 2\sqrt{2}\cos t \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t\sqrt{\cos^2 t+1}} = 0.$$

Exercício 7.

Dados $z = 3xy - 4y^2$; $x = 2se^r$; $y = re^{-s}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras expressando z em termos de r e s;

Solução 7.
1^a **Maneira:**

$z = 3xy - 4y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial z}{\partial r} = 3y\frac{dx}{dr} + (3x - 8y)\frac{dy}{dr}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 3y\frac{dx}{ds} + (3x - 8y)\frac{dy}{ds}$;

$x = 2se^r$, $\frac{dx}{dr} = 2se^r = \frac{d^2x}{dr^2}$, $\frac{dx}{ds} = 2e^r = \frac{d^2x}{dsdr}$;

$y = re^{-s}$, $\frac{dy}{dr} = e^{-s}$, $\frac{d^2y}{dr^2} = 0$, $\frac{dy}{ds} = -re^{-s}$, $\frac{d^2y}{dsdr} = -e^{-s}$.

Logo:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 3y\frac{d^2x}{dr^2} + 3\frac{dy}{dr}\frac{dx}{dr} + 3\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr} - 8\frac{dy}{dr}\frac{dy}{dr} + (3x - 8y)\frac{d^2y}{dr^2} = 6rse^{r-s} + 12se^{r-s} - 8e^{-2s} = (r + 2)6se^{r-s} - 8e^{-2s}$ e

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial r} = 3y\frac{d^2x}{dsdr} + 3\frac{dy}{ds}\frac{dx}{dr} + 3\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dr} - 8\frac{dy}{ds}\frac{dy}{dr} + (3x - 8y)\frac{d^2y}{dsdr} = 6re^{r-s} - 6rse^{r-s} + 6e^{r-s} + 8re^{-2s} - 6se^{r-s} + 8re^{-2s} = (1 + r - s - rs)6e^{r-s} + 16re^{-2s}$.

2^a **Maneira:**

$z = 6rse^{r-s} - 4r^2e^{-2s} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial z}{\partial r} = 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8re^{-2s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 6re^{r-s} - 6rse^{r-s} + 8r^2e^{-2s}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 6se^{r-s} + 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s} = (r + 2)6se^{r-s} - 8e^{-2s}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial r} = 6e^{r-s} + 6re^{r-s} - 6se^{r-s} - 6rse^{r-s} + 16re^{-2s} = (1 + r - s - rs)6e^{r-s} + 16re^{-2s}$.

Exercício 8.

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

(d) Porque as derivadas mistas não são iguais?

Solução 8.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$.

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \dfrac{\frac{y(-y^4)}{y^4}}{y} = -1$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \dfrac{\frac{x(x^4)}{x^4}}{x} = 1$.

1. As derivadas parciais de segunda ordem precisam ser contínuas no ponto.

Exercício 9.
Uma função $z = f(x,y)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

é chamada *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

(a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

(b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$.

Solução 9.

(a) Sim;

(b) Não.

Exercício 10.
Determine o maior conjunto aberto onde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(a) $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$;

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

Solução 10.

(a) $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D}$ é o disco fechado de raio 1 centrado na origem;

(c) $\mathbb{R}^2$.

Exercício 11.

Seja $y = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, para todo x, onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

Solução 11.

Sejam $u = (x - at)$ e $v = (x + at)$. Assim,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}(x + at) = -a\frac{\partial \phi}{\partial u}(x - at) + a\frac{\partial \psi}{\partial v}(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}(x - at) + a\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t}(x + at) = a^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(x - at) + a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(x + at),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}(x + at) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}(x - at) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}(x + at) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(x - at) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(x + at).$$

Exercício 12.

Seja $r = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0,$$

para todo (x, y), onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

Solução 12.

Seja $u = x + y$. Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \phi(u) + x\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial \psi}{\partial u}(u), \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = x\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + \psi(u) + y\frac{\partial \psi}{\partial u}(u), \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + 2\frac{\partial \psi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}.$$