Lista 3 com respostas

MAT3210 — 2° SEMESTRE DE 2019

Exercício 1.
Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = 7xy^3 - 2x^3 + 8y^2 - \frac{1}{4}$,

(b) $f(x,y) = \tan(xy) - \frac{1}{xy}$,

(c) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^4) + 3x$,

(d) $f(x,y) = e^{3x^2+y^3} - 7x + \frac{1}{x+2y}$,

(e) $f(x,y) = x\sqrt{3x^2y + 7y^3}$,

(f) $f(x,y) = \ln(x^2 + 4y^2 + 2)$,

(g) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$,

(h) $f(x,y) = \frac{x^3 - 2y}{x^2 - 4y}$,

(i) $f(x,y) = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(j) $f(x,y) = \ln(xy^3 + yx^2 + z)$, onde $z = \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}$.

Exercício 2.
Determine o conjunto dos pontos onde as funções admitem derivadas parciais:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)^3}{(x+1)^2 + y^2} + 5x, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ -5, & \text{se } (x,y) = (-1,0), \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

Exercício 3.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $h(4) = 3$ e $h'(4) = -1$.
Considere $f(x,y) = xh(3x^2 + y^3)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

Solução 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2h'(3x^2+y^3) + h(3x^2+y^3),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6h'(4) + h(4) = -6+3 = -3.$$

Exercício 4.

(a) Seja $z = x\sin\dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

(b) Seja $f(x,y) = x^3y - y^3x$. Procure

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

no ponto $(1,2)$.

Solução 4.

(a)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) - yx^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2} = z$$

(b)

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{3x^2y - y^3 + x^3 - 3y^2x}{(3x^2y - y^3)\,(x^3 - 3y^2x)} = \frac{6-8+1-12}{(6-8)\,(1-12)\,.}$$

Exercício 5.

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução 5.

Para $(x,y) \neq 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right) + 2y\left(x+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} = \infty.\end{aligned}$$

Exercício 6.
Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável.

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

d)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Exercício 7.
Ache a equação do plano tangente a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = 2x^2y$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

(b) $z = xe^{x^2-y^2}$, no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

(c) $z = e^x \ln(y)$, no ponto $(3, 1, 0)$.

(d) $z = \arctan(x - 2y)$, no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

Exercício 8.
Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

Solução 8.
Lembremos que o vetor normal ao plano será

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = (2x_0 + y_0, x_0, -1)$$

pois, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Agora como queremos que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$, que temos como vetor normal $\vec{m} = (2, 3, -1)$, basta ter

$$\vec{n} = \lambda\vec{m},$$

logo temos

$$\begin{aligned} 2x_0 + y_0 &= 2\lambda \\ x_0 &= 3\lambda \\ \lambda &= 1, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} y_0 &= -4 \\ x_0 &= 3 \\ \lambda &= 1, \end{aligned}$$

e

$$z_0 = f(3, -4) = 9 - 12 = -3.$$

Além disso a equação do plano tangente à superfície é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

então tal equação do plano é

$$2\,(x - 3) + 3\,(y + 4) - (z + 3) = 0.$$

Exercício 9.
Determine o plano que passa por $A = (1, 1, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

Solução 9.
O plano tangente no ponto genérico $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem forma

$$z - x_0y_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0).$$

Como A e B estão no plano temos

$$\begin{aligned} 2 - x_0y_0 &= y_0(1 - x_0) + x_0(1 - y_0), \\ 1 - x_0y_0 &= y_0(-1 - x_0) + x_0(1 - y_0). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos x_0 e y_0.

Exercício 10.
Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

Solução 10.
O plano tangente no ponto genérico $P = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$ tem forma

$$z - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$

Agora os pontos $(0,3,0)$ e $(3,0,0)$ pertencem a reta intersecção dos planos $x+y+z = 3$ e $z = 0$, assim

$$\begin{cases} 0 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(3 - x_0) + 2y_0(0 - y_0), \\ 0 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(0 - x_0) + 2y_0(3 - y_0). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos x_0 e y_0.

Exercício 11.
Calcule os valores aproximados das:

(a) $\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{7.9}$.

(b) $1.04^{2.02}$.

(c) $\sqrt{0.98^2 + 1.01^2 + 2.03^2}$.

(d) $e^{1.01^2 - 1.002^2}$.

Exercício 12.
Calcule as derivadas mencionadas pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida e aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$, $\dfrac{dz}{dt} =?$

(b) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$, $\dfrac{dz}{dt} =?$

(c) $z = x^2y - y^2x$, $x = u \sin t$, $y = u \cos t$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

(d) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

Solução 12.

Exercício 13.
Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Solução 13.
Tomando $x = u - v$ e $y = v - u$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercício 14.
Suponha que para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Solução 14.
Reparemos que $x = t^2$ e $y = 2t$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ 3t^2 - 3 &= 2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Terminamos fazendo $t = 1$.