Cálculo II — Lista 1 com respostas.
Aplicações da integral definida.

Volumes de revolução

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:
   (a) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2}$;
   (b) $1 \leqslant x \leqslant 4, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$;
   (c) $2x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y$;
   (d) $x^2 \leqslant y \leqslant x$;
   (e) $0 \leqslant y \leqslant x, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2$;
   (f) $y \geqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2$;
   (g) $\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:
   (a) $1 \leqslant x \leqslant e, \quad 0 \leqslant y \leqslant \ln x$;
   (b) $0 \leqslant x \leqslant 8, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{x}$;
   (c) $1 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2 - 1$;
   (d) $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \arctan x$;
   (e) $1 \leqslant x \leqslant 4, \quad 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$;
   (f) $y \geqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2$;
   (g) $0 \leqslant x \leqslant 2, \quad \sqrt{x-1} \leqslant y, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2$.

3. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da parábola $y^2 = 4x$ em torno do eixo x.

4. Uma elipse com eixos $2a$ e $2b$ gira-se: 1) em torno do eixo x; 2) em torno do eixo y. Calcule os volumes dos sólidos correspondentes. Em caso particular $a = b$ calcule o volume da bola.

5. Um conjunto limitado pelas parábolas $y^2 = x$ e $x^2 = y$ gira-se em torno do eixo x. Calcule o volume do solido.

6. Calcule o volume do solido obtido pela rotação do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2, \}$$

em torno do eixo y.

Área da superfície de revolução

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

   (b) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \leqslant x \leqslant R, (R > 0);$

   (c) $f(x) = x^2, \qquad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2};$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4;$

   (e) $f(x) = \tan x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

2. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ (de $x = 0$ ao $x = a$).

Comprimento das curvas

1. Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

   (b) $f(x) = \dfrac{4}{3}x + 3, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;$

   (c) $f(x) = \ln(x), \qquad 1 \leqslant x \leqslant e;$

   (d) $f(x) = \ln(1 - x^2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2};$

   (e) $f(x) = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, \qquad a \leqslant x \leqslant b;$

   (f) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4};$

   (g) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

   (h) $f(x) = e^x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

2. Calcule o comprimento das curvas dadas:

   (a) $x(t) = 3t - 1, \quad y(t) = t + 1, \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2;$

   (b) $x(t) = 3t, \quad y(t) = 2t^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

   (c) $x(t) = 1 - \cos t, \quad y(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (d) $x(t) = \dfrac{t^2}{2}, \quad y(t) = \dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

   (e) $x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (f) $x(t) = a\cos^5 t, \quad y(t) = a \operatorname{sen}^5 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

   (g) $x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

Coordenadas polares

1. Desenhe a curva dada (em coordenadas polares):

   a) $\rho = e^{-\theta}, \qquad \theta \geqslant 0,$

   b) $\rho = \cos(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

   c) $\rho = 2, \qquad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

   d) $\rho = \cos(4\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3,$

   e) $\rho^2 = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

   f) $\rho = 1 - \operatorname{sen}(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

g) $\rho = \cos^2(\theta) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

2. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta$,
   b) $\rho = \cos(2\theta)$,
   c) $\rho^2 = \cos\theta, \rho \geqslant 0$,
   d) $\rho = \cos(3\theta)$.

3. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$.
   b) $\rho = \operatorname{sen}(\theta)$ e $\rho = 1 - \cos\theta$.
   c) $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.
   d) $\rho = \cos\theta$ e $\rho = \operatorname{sen}\theta$.
   e) $\rho^2 = \cos\theta$ e $\rho^2 = \operatorname{sen}\theta$ com $\rho \geqslant 0$,
   f) $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.

4. Calcule o comprimento da curva dada em coordenadas polares:

   a) $\rho = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
   b) $\rho = 1 + \cos(\theta), 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
   c) $\rho = \dfrac{1}{\theta}, 1 \leqslant \theta \leqslant \sqrt{3}$.
   d) $\rho = e^{-\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
   e) $\rho = \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.
   f) $\rho = \theta^2, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Centro de massa

1. Determine o centro de massa da região A:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$,
   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,
   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$,
   d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,

2. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$,

3. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = 9 - x^2, \qquad -3 \leqslant x \leqslant 3$,

4. Determine o centro de massa da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$, e $g(x) = x^3$.

RESPOSTAS

Volume de revolução

1.

(a) $\frac{21\pi}{8}$

(b) $\frac{15\pi}{2}$

(c) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

(d) $\frac{2\pi}{15}$

(e) $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

(f) $-2\pi(\frac{1}{4}+\frac{1-\sqrt{8}}{3})$

(g) $\frac{\pi}{2}$

2.

(a) $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$

(b) $\frac{768\pi}{7}$

(c) $\frac{9\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$

(e) $\frac{49\pi}{5}$

(f) $\frac{44\pi}{55}$

(g) $\frac{88\pi}{15}$

3. Desconsidere esse exercício!

4. $\frac{4\pi b^2 a}{3}, \frac{4\pi b a^2}{3}, \frac{4\pi a^3}{3}$

5. $\frac{3\pi}{10}$

6. $\frac{8\pi}{3}$

Área da superfície de revolução

1.

(a) $\frac{\pi}{2}(e^2+4+e^{-2})$

(b) $4\pi R^2$

(c) $\frac{\pi}{32}(3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1))$

(d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$

(e) $\pi(\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|)+2\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

2. $\frac{\pi}{9}\left((1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1\right)$

Comprimento das curvas

1.

(a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(b) $\frac{10}{3}$

(c) $1+\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+1/2\left(\ln(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{1+\sqrt{1+e^2}})-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}})\right)$

(d) $\ln 3-\frac{1}{2}$

(e) $\ln(\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|)-b+a$

(f) $\frac{1}{4}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}})\right]$

(g) $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$

(h) $1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\ln(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}})$

2.

(a) $\sqrt{10}$

(b) $4\sqrt{2} - 2$

(c) 4

(d) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$

(e) $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

Coordenadas polares

2.

(a) $\frac{9\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{\pi}{4}$

3.

(a) $\frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}$

(b) $\frac{\pi-2}{2}$

(c) $7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(e) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\frac{8\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.

(a) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\pi + \sqrt{\pi^2+1})$

(b) 4

(c) $\sqrt{2}\frac{2\sqrt{3}}{3} + \ln(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}})$

(d) $\sqrt{2(1-e^{-2\pi})}$

(e) $\sqrt{3}$

(f) $\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}$

Centro de massa

1.

(a) $(\frac{4}{5}, \frac{2}{7})$

(b) $(\frac{4}{3\pi}, \frac{2}{3\pi})$

(c) $(0, \frac{2}{3\pi})$

(d) $(\frac{1}{2}, \frac{6}{15})$

2. $(0, \frac{4}{\pi})$

3. (0, 3.6)

4. $(\frac{12}{25}, \frac{3}{7})$