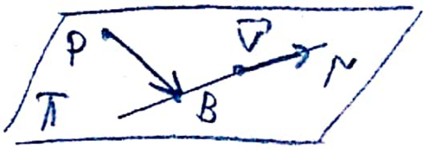
P2, turma D

1.



A reta da intersecção dos π_1 e π_2 tem vetor diretor

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} + 2\vec{k} - \vec{i} + 2\vec{j} =$$

$$= \underline{(0, 4, 4)}$$

Seja ponto $B \in r \Rightarrow \vec{PB}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores do plano $\pi \Rightarrow$ vetor normal do π é $\vec{n} = \vec{PB} \times \vec{v}$

Procuremos B: Seja $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 4 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B = \underline{(1, 0, 2)} \Rightarrow \vec{PB} = \underline{(2, -1, 3)}$

Assim, $\vec{n} = \vec{PB} \times \vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{matrix} =$

$$= -4\vec{i} + 8\vec{k} - 12\vec{i} - 8\vec{j} = \underline{(-16, -8, 8)}$$

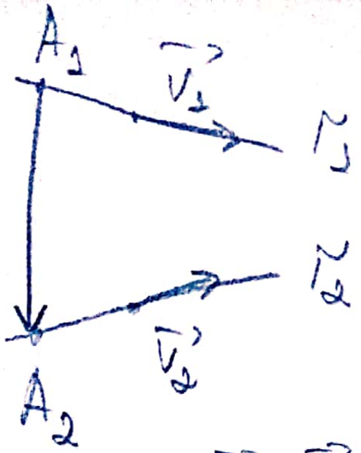
A equação geral do π tem forma:

$\pi: ax + by + cz = d$, onde $\vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow$

$\pi: -16x - 8y + 8z = d$. Como $B = (1, 0, 2) \in \pi$,

$-16 + 16 = \underline{0 = d} \Rightarrow \underline{\pi: -16x - 8y + 8z = 0}$

2



Vamos achar vetores diretores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ das r_1 e r_2

$$\vec{v_1} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$

$$= -3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} + 3\vec{j} = \underline{(-3, 2, -1)}$$

$$\vec{v_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} =$$

$$= \underline{(3, -1, -2)}$$

Como $\vec{v_1} \nparallel \vec{v_2}$, as retas são ou reversas ou concorrentes.

Lembra que r_1 e r_2 são reversas $\Longleftrightarrow$

$\vec{A_1 A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \neq 0$

Procuremos $A_1 \in r_1$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\underline{A_1 = (0, 1, 1)}$

$A_2 \in r_2$: seja $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \underline{(1, 0, 0)}$

Logo, $\vec{A_1 A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} =$

$= -4 + 3 - 3 + 6 - 1 + 6 = 7 \neq 0 \Rightarrow r_1$ e r_2 são $\underline{\text{reversas}}$

Lembra que $d(r_1, r_2) = \dfrac{|\vec{A_1 A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}$

③

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} - 6\vec{k} - \vec{i} - 6\vec{j} =$$

$$= \underline{(-5, -9, -3)}$$

$$\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \| = \sqrt{25 + 81 + 9} = \sqrt{115}$$

Logo, $d(r_1, r_2) = \dfrac{7}{\sqrt{115}}$

3. As equações de mudança de Σ_2 para Σ_1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\Sigma_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 - x' + z' \\ y = x' - y' \\ z = y' + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - x' + z' \\ y + z = x' + z' \\ z = y' + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 + 2z' \\ x' = y + z - z' \\ y' = z - z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z' = \dfrac{x + y + z - 1}{2} \\ x' = y + z - \dfrac{x + y + z - 1}{2} \\ y' = z - \dfrac{x + y + z - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \\ z' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

a) Logo r:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1 - t - 1 - t + t}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1 - t + 1 + t + t}{2} \\ z' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1 + t - 1 - t + t}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2} \\ z' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

b) $\pi: [x-2y+2z=2]_{\Sigma_1}$ ou

$1-x'+z'-2(x'-y')+2(y'+z')=2$ ou

$-3x'+4y'+3z'=1$ é equação geral de π em Σ_2

4. a) $y^2-4y-12x^2-12x-3 = (y^2-4y+4-4) -$

$-12\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-3 = (y-2)^2-12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4+3-3 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1$ é hipérbole

Denotando $\begin{cases} x' = x+\frac{1}{2} \\ y' = y-2 \end{cases}$, obtemos a equação

reduzida no sistema $O_2x'y'$:

$$\frac{(y')^2}{2^2} - \frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

b) O centro é $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ e semi-eixos são:

$a=2,\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}$