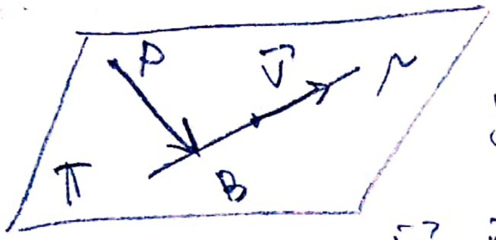
P2, turma C

1. 

A reta da interseção dos π_1 e π_2 tem vetor director

$$\vec v = \vec n_1 \times \vec n_2 = \det\begin{pmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\vec i & \vec j\\ 1 & -1\\ 2 & -1\end{matrix} =$$

$$= 2\vec i + 4\vec j - \vec k + 2\vec k + 2\vec i + 2\vec j = \underline{(4, 6, 1)}$$

Seja ponto $B \in r \Rightarrow \vec{PB}$ e $\vec v$ são vetores directores do plano $\pi \Rightarrow$ vetor normal do π é $\vec n = \vec{PB} \times \vec v$

Procuremos B: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2y = 4 \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow B = (0, -2, -1) \Rightarrow$

$\vec{PB} = (-1, -3, 0)$. Assim, $\vec n = \vec{PB} \times \vec v = \det\begin{pmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & -3 & 0\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\vec i & \vec j\\ -1 & -3\\ 4 & 6\end{matrix} =$

$$= -3\vec i - 6\vec k + 12\vec k + \vec j = \underline{(-3, 1, 6)}$$

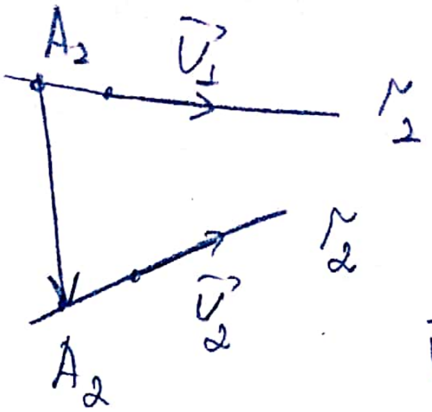
A equação geral do π tem forma:

$\pi: ax + by + cz = d$, onde $\vec n = (a, b, c) \Rightarrow$

$\pi: -3x + y + 6z = d$. Como $B = (0, -2, -1) \in \pi$,

$-2 - 6 = \underline{-8 = d} \Rightarrow \underline{\pi: -3x + y + 6z = -8}$

2.



Vamos achar vetores diretores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ das r_1 e r_2

$$\vec{v_1} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$= -2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{k} - \vec{j} = \underline{(-2,-1,1)}$$

$$\vec{v_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} =$$

$$= \underline{(2,-3,1)}$$

Como, $\vec{v_1} \nparallel \vec{v_2}$, as retas são ou reversas ou concorrentes.

Lembra que r_1 e r_2 são reversas $\Leftrightarrow$

$\vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \neq 0$.

Procuremos $A_1 \in r_1$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$A_1 = \underline{(0,0,-1)}$

$A_2 \in r_2$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$A_2 = \underline{(0,1,-1)}$

Logo, $\vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$

r_1 e r_2 são <u>reversas</u>

Lembra que $d(r_1, r_2) = \dfrac{|\vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} + 2\vec{k} + 3\vec{i} + 2\vec{j} =$$

$$= \underline{(2, 4, 8)}$$

$$\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \| = \sqrt{4 + 16 + 64} = \sqrt{84}$$

Logo, $d(r_1, r_2) = \dfrac{4}{\sqrt{84}} = \underline{\dfrac{2}{\sqrt{21}}}$

3. As equações de mudança de Σ_2 para Σ_1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\Sigma_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 + x' + y' \\ y = z' \\ z = -x' + y' - z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = y \\ x + z = -1 + 2y' - y \\ x = -1 + x' + y' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z' = y \\ y' = \dfrac{x + z + y + 1}{2} \\ x' = x + 1 - y' = x + 1 - \dfrac{x + z + y + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \\ z' = y \end{cases}$$

a) Logo, r:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1 + t + t - 1 + t}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1 + t - t + 1 - t}{2} \\ z' = -t \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}t \\ y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} \\ z' = -t \end{cases}$$

b) $\pi: [2x - y - 2z = -1]_{\Sigma_1}$ ou

$2\cdot(-1+x'+y') - z' - 2(-x'+y'-z') = -1$ ou

$\underline{4x' + z' = 1}$ é equação geral do π em Σ_2

4. a) $12y^2 - 12y - x^2 - 2x - 2 = 12\left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) -$

$- (x^2 + 2x + 1 - 1) - 2 = 12\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - (x+1)^2 - 3 + 1 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{(x+1)^2}{2^2} = 1$$ é hipérbole.

Denotando $\begin{cases} y' = y - \frac{1}{2} \\ x' = x + 1 \end{cases}$, obtemos a equação reduzida no sistema $O_2x'y'$:

$$\frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{(x')^2}{2^2} = 1$$

b) O centro é $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e semieixos são:

$a = \frac{1}{3}$, $b = 2$