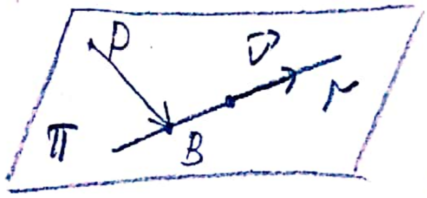
P2, turma B

1



A reta da interseção dos π_1 e π_2 tem vetor diretor

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= -6\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \underline{(-7, -4, 5)}$$

Seja ponto $B \in r \Rightarrow \vec{PB}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores do plano $\pi \Rightarrow$ vetor normal do π é $\vec{n} = \vec{PB} \times \vec{v}$

Procuremos B: seja $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = -z \\ -2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \underline{(1, 0, -1)} \Rightarrow$

$\vec{PB} = \underline{(2, 1, -2)}$. Assim, $\vec{n} = \vec{PB} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 \\ -7 & -4 \end{matrix} =$

$$= 5\vec{i} + 14\vec{j} - 8\vec{k} + 7\vec{k} - 8\vec{i} - 10\vec{j} = \underline{(-3, 4, -1)}$$

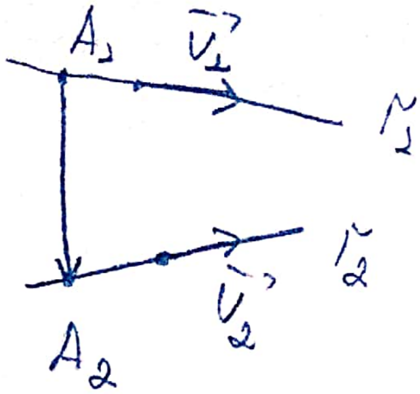
A equação geral do π tem forma:

$\pi:\ ax + by + cz = d$, onde $\vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow$

$\pi:\ -3x + 4y - z = d$. Como $B = (1, 0, -1) \in \pi$,

$-3 + 1 = \underline{-2 = d} \Rightarrow \underline{\pi:\ -3x + 4y - z = -2}$

2.



Vamos achar vetores diretores $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ das r_1 e r_2

$$\vec{v_1} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} = \underline{(1,-3,2)}$$

$$\vec{v_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} = \underline{(3,2,-1)}$$

Como $\vec{v_1} \nparallel \vec{v_2}$, as retas são ou reversas ou concorrentes

Lembra que r_1 e r_2 são reversas $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \neq 0$.

Procuremos $A_1 \in r_1$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\underline{A_1 = (0,1,0)}$

$A_2 \in r_2$: seja $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{A_2 = (1,1,0)}$

Logo, $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow r_1$ e r_2 são <u>reversas</u>.

Lembra que $d(r_1, r_2) = \dfrac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{matrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} + $$
$$+ 4\vec{k} + 9\vec{i} + \vec{j} =$$
$$= \underline{(5, -2, 1)}$$

$$\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

Logo, $d(r_1, r_2) = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{30}}}$.

3 As equasões de mudansa de Σ_2 para Σ_1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\Sigma_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 1 - x' + y' + z' \\ z = y' - z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y + z = 1 - x + 2y' \\ z = y' - z' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y + z + x - 1}{2} \\ z' = y' - z = \dfrac{y + z + x - 1}{2} - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ z' = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \end{cases}$$

a) Logo r: $\begin{cases} x' = 1 + t \\ y' = -\frac{1}{2} + \dfrac{1+t+1-t+1+t}{2} \\ z' = -\frac{1}{2} + \dfrac{1+t+1-t-1-t}{2} \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} x' = 1 + t \\ y' = 1 + \frac{t}{2} \\ z' = -\frac{t}{2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

b) $\pi : [-x + y - 2z = 0]_{\Sigma_1}$ ou

$-x' + (1 - x' + y' + z') - 2(y' - z') = 0$ ou

$\underline{-2x' - y' + 3z' = -1}$ é equação geral de π em Σ_2

4) a) $9x^2 - 6x - 4y^2 + 8y - 5 = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) -$

$- 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 5 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 4(y-1)^2 - 1 + 4 - 5 = 0$

$$\iff \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$ é hiperbole

Denotando $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{3} \\ y' = y - 1 \end{cases}$, obtemos a equação reduzida no sistema $O_2x'y'$:

$$\underline{\frac{(x')^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1}$$

b) O centro é $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e semieixos são:
$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$